第一章：绪论

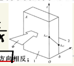
热量传递的3种方法

导热

物体各部分之间不发生相对位移时，依靠分子、原子及自由电子等微观粒子的热运动而产生的热能传递称为热传导，简称导热。 导热是物质的固有本质

无规则

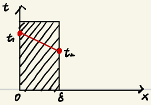
$\Phi=-\lambda A\frac{dt}{dx}$



式中："－"表示热量传递方向与温度梯度方向相反；

导热系数 λ (W/m·K)

热流密度 $q=\Phi/A$ (W/m²) $=-\lambda\frac{dt}{dx}$ $\rightarrow$ $q\int_0^\delta dx=-\lambda\int_{t_1}^{t_2}dt$ $\rightarrow$ $\boxed{q=\frac{\lambda(t_1-t_2)}{\delta}}$



对流

热对流是指由于流体的宏观运动而引起的流体各部分之间发生相对位移，冷、热流体相互掺混所导致的热量传递过程。热对流仅发生在流体中，热对流的同时必伴随有微观粒子热运动而产生的导热现象。

对流传热：流体流过一个物体表面时流体与物体表面间的热量传递过程，称为对流传热。

自然对流

强制对流

$h=\frac{-\lambda}{\Delta t}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}$

牛顿冷却公式 $\left(\begin{array}{l}q=h(t_f-t_w)\\ q=h(t_w-t_f)\end{array}\right.$ $\rightarrow q=h\Delta t \rightarrow \Phi=hA\Delta t$

表面传热系数 h (W/m²·K)

表面传热系数的大小 h 与传热过程中的许多因素有关。它不仅取决于物体的物性（导热系数 λ、黏度 η、密度 ρ、比热容 c_p 等）与换热表面的形状、大小与布置，而且与流体的流速有关。一般

辐射

$\alpha=1$ $\varepsilon=1$ max

黑体：能吸收投入到其表面上的所有辐射能量的物体。黑体的吸收本领和辐射本领在同温度的物体中是最大的。

黑体在单位时间内发出的热辐射热量服从斯蒂芬——玻耳兹曼定律，即：

$$\Phi=A\sigma T^4 \qquad ④$$

式中 T——黑体的热力学温度，K；

σ——斯蒂芬—玻耳兹曼常量（黑体辐射常数），其值为 $5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\cdot K^4)}$；

A——辐射表面积，m²。

实际物体辐射热流量的计算采用斯蒂芬—玻耳兹曼定律的经验修正形式：

$$\Phi=\varepsilon A\sigma T^4$$

式中，ε 为物体的发射率（或黑度），其值总小于1，大小与物体的种类及表面状态有关。

要计算辐射传热量，还必须考虑投射到物体上的辐射热量的吸收过程。一个表面积为 A_1、表面温度为 T_1、发射率为 ε_1 的物体被包容在一个很大的表面温度为 T_2 的空腔内，物体与空腔表面间的辐射换热量为：

$$\Phi=\varepsilon_1 A_1\sigma(T_1^4-T_2^4)$$

上述傅里叶定律、牛顿冷却公式、斯蒂芬—玻耳兹曼定律，适用于稳态和非稳态热传递过程，若是非稳态时，①、③、④式中的温度是瞬时温度，温度不仅仅是 x 的函数。

传热过程

1. 概念

热量由固体壁面一侧的流体通过壁面传递到另一侧流体的过程称传热过程。

2. 传热方程式

一般来说，传热过程包含串联着的三个环节，即：

(1)热流体→壁面高温侧。

(2)壁面高温侧→壁面低温侧的导热。

(3)壁面低温侧→冷流体。

由于是稳态过程，通过串联着的每个环节的热流量 Φ 相同。

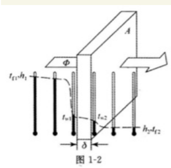


图 1-2

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi=Ah_1(t_{f1}-t_{w1})\\ \Phi=\frac{\lambda A}{\delta}(t_{w1}-t_{w2})\\ \Phi=Ah_2(t_{w2}-t_{f2})\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{K=\frac{1}{\frac{1}{h_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{h_2}}}\ (\mathrm{W/m^2\cdot K}) \rightarrow \frac{1}{AK}$$

总传热系数

$\frac{1}{AK}$ 传热过程热阻

$$\frac{1}{AK}=\frac{1}{Ah_1}+\frac{\delta}{A\lambda}+\frac{1}{Ah_2}$$

$$\Phi=AK(t_{f1}-t_{f2})$$

【1-3】（东南大学2002年考研试题）名词解释：对流传热。

答：工程上，把流体流过一个物体表面时流体与物体表面间的热量传递过程称为对流传热。

【1-4】（东南大学2002年考研试题）名词解释：传热系数。h

答：传热系数在数值上等于冷、热流体间温差 $\Delta t=1℃$、传热面积 $A=1\mathrm{m^2}$ 时热流量的值。Φ 它表征传热过程强烈程度。

【1-5】（东南大学2000年考研试题）解释以下现象：某办公室由中央空调系统维持室内恒温，人们注意到尽管冬夏两季室内都是20℃，但感觉却不同。 同温不同感 → 墙壁辐射传热

答：这是因为冬夏两季室外温度不同，在对流传热的作用下，导致冬夏两季墙壁的温度是不同的。考虑辐射传热，人体与墙壁之间进行辐射传热。由于冬天的壁温较低，所以冬天人体与墙壁之间的辐射传热量更大。所以尽管冬夏两季室内都是20℃，但人的感觉是不一样的。

例1－4 利用同一冰箱储存相同的物质时，试问结霜的冰箱耗电量大还是未结霜的冰箱耗电量大？ 附加热阻

解 当其他条件相同时，冰箱的结霜相当于在冰箱蒸发器和冰箱冷冻室（或冷藏室）之间增加了一个附加热阻，因此，要达到相同的制冷室温度，必然要求蒸发器处于更低的温度。所以，结霜的冰箱耗电量更大。 $\Phi=\frac{\Delta t}{R}$

例1－5 有人将一碗热稀饭置于一盆凉水中进行冷却。为使稀饭凉得更快一些，你认为他应该搅拌碗中的稀饭还是盆中的凉水？为什么？ 搅动稀饭 → 强制对流

解 从稀饭到凉水是一个传热过程。显然，稀饭和水的换热在不搅动时属自然对流。而稀饭的换热比水要差。因此，要强化传热增加散热量，应该用搅拌的方式强化稀饭侧的传热

【1-9】（浙江大学2006年考研试题）已知一个换热过程的温压为100℃，热流量为10kW，则其热阻为 0.01 K/W

答案：0.01K/W

解析：设热阻为 R，则根据传热方程式可知 $\boxed{\Phi=\frac{\Delta t}{R}}$。把 $\Delta t=100℃$、$\Phi=10\mathrm{kW}$ 代入上式，可得热阻为：$R=0.01\mathrm{K/W}$。

【1-10】（浙江大学2006年考研试题）在一维稳态传热过程中，每一个换热环节的热阻分别为0.01K/W、5K/W、100K/W，则热阻为 100K/W 的换热环节上采取强化传热措施效果最好。

答案：100K/W

解析：热阻为100K/W的换热环节在总热阻中占主导地位，它具有改变总热阻的最大潜力。因此，在热阻为100K/W的换热环节上采取强化传热措施效果最好。

【1-20】（国防科技大学2004年考研试题）无限大平壁的壁厚 δ 及两侧表面的温度 t_1，t_2 均已知，材料的导热系数对温度的依变关系为 $\boxed{k=k_0(1+\beta t^2)}$，式中，$k_0$ 和 β 均为常数值。请导出平壁导热热流密度的计算式。 $q=-\lambda\frac{dt}{dx}$

解：根据傅里叶定律，热流密度的表达式为：

$$q=-k\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

等式两边同乘 $\mathrm{d}x$，并且积分可得：

$$\int_0^\delta q\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}-k\mathrm{d}t$$

把 $k=k_0(1+\beta t^2)$ 代入上式，可得：

$$\boxed{\int_0^\delta q\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}-k_0(1+\beta t^2)\mathrm{d}t}$$

计算整理可得平壁导热热流密度的计算式为：

$$q=-\frac{k_0}{\delta}\left[(t_2-t_1)+\frac{1}{3}\beta(t_2^3-t_1^3)\right]$$

例1－2 冬天，在相同的室外温度条件下，为什么有风比无风时感到更冷些？

解 假定人体表面温度相同时，人体的散热在有风时相当于强制对流换热，而在无风时属自然对流换热（不考虑热辐射或假定辐射换热量相同时）。而空气的强制对流换热强度要比自然对流强烈。因而在有风时从人体带走的热量更多，所以感到更冷一些。 h↑

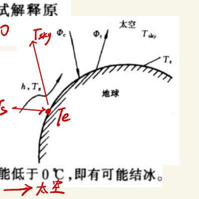
讨论：读者应注意的是人对冷暖感觉的衡量指标是散热量的大小而不是温度的高低，即当人体散热量低时感到热，散热量高时感到冷。经验告诉我们，当人的皮肤散热热流为58 W/m²时感到热，为232 W/m²时感到舒服，为696 W/m²感到凉快，而大于928 W/m²时感到冷。

没零下但结霜

例1－7 冬季晴朗的夜晚，测得室外空气温度 T_a 高于0℃，有人却发现地面上结有一层薄冰，试解释原因（若不考虑水表面的蒸发）。 地表温度 $T_e<0$

解 如图1－3所示。假定地面温度为 T_e，太空温度为 T_{sky}，设过程已达稳态，空气与地面的表面传热系数为 h，地球表面近似看成温度为 T_e 的黑体，太空可看成温度为 T_{sky} 的黑体，则由热平衡： 太空

$$h(T_a-T_e)=\sigma(T_e^4-T_{sky}^4)$$



由于 $T_a>0℃$，而 $T_{sky}<0℃$，因此，地球表面温度 T_e 有可能低于0℃，即有可能结冰。

空气(气温) → 地表 → 太空

【1-13】（重庆大学2005年考研试题）"对流传热"是否是基本的传热方式，它与"热对流"有何本质上的区别？解释这两种现象并作比较。

答：对流传热不是基本的传热方式。它是流体与相互接触的固体表面之间的热能传递现象，是导热和热对流两种基本传热方式共同作用的结果；而热对流是由于流体的宏观运动使不同温度的流体相对位移而产生的热能传递现象，热对流只发生在流体之中，并伴随有微观粒子热运动而产生的导热。

流过物体表面时

掺混

对流传热：流 ↔ 固

热对流：流 ↔ 流

第二章：

$$q = \Phi/A = -\lambda \,\mathrm{grad}\, t = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\vec{n} \quad (W/m^2)$$

$$\Phi = -\lambda A\, \mathrm{grad}\, t = -\lambda A \frac{\partial t}{\partial n}\vec{n} \quad (W) \longrightarrow$$

导热系数 $\lambda = \dfrac{|\vec{q}|}{|\frac{\partial t}{\partial n}\vec{n}|} \quad (W/m\cdot k)$

导热 前一后 → $t_1 - t_2$

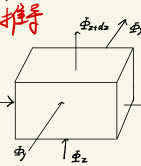
热流密度矢量 $\vec{q} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k} = -\lambda \nabla t$ 空间温度梯度

$$= -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\vec{n} = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial t}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial t}{\partial z}\vec{k}\right)$$

① 负号"−"表示热量传递指向温度降低的方向；而 $\vec{n}$ 是通过该点的等温线上法向单位矢量，指向温度升高的方向；

② 热流方向总是与等温线(面)垂直；

推导



$$\begin{cases} (\Phi_x)_x = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_x dydz \\ (\Phi_x)_{x+dx} = (\Phi_x)_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x}dx \\ \quad = (\Phi_x)_x + \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_x dydz\right]dx \end{cases}$$

$$\therefore \Phi_x - \Phi_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_x dydz\right]dx$$

导热微分方程

利用能量守恒定律并借助傅里叶定律，可以导出导热微分方程，对于各向同性的导热物体在直角坐标系下有如下形式：

$$\underbrace{\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau}}_{①\ dU} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)}_{②} + \underbrace{\dot{\Phi}}_{③} \qquad (2-5)$$

$\dot{\Phi}$ 内热源 (W/m^3) 产热为正 消耗为负

上式中①表示微元体热力学能的增量；②表示导入微元体的净热流量("导进"与"导出"之差)③表示微元体内热源的生成热。

$$\rho \cdot c \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot dxdydz = \dot{\Phi}dxdydz + \sum_{xyz}[\Phi_i - \Phi_{i+di}]$$

$$\rightarrow \boxed{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right) + \dot{\Phi}}$$

$\boxed{a = \frac{\lambda}{\rho c}}$ 热扩散率

若导热系数 $\lambda = const$，则 $\boxed{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \dot{\Phi}} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c}}$

若常物性、稳态 $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$，得泊松方程：$\boxed{\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0}$

(三)热扩散率的物理意义

由热扩散率的定义式 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ 可知：

物体内温度趋于一致的能力(热量扩散性能) 传播温度变化

(1)λ 是物体的导热系数，λ 越大，在相同温度梯度下，可以传导更多的热量。

(2)ρc 是单位体积的物体温度升高 1℃ 所需的热量。ρc 越小，温度升高 1℃ 所吸收的热量越少，可以剩下更多的热量继续向物体内部传递，使物体内各点的温度更快随界面温度的升高而升高。由此可见 a 的物理意义：①a 越大，表示内部各点温度扯平的能力越大；②a 越大，表示物体中温度变化传播的越迅速。所以 a 是材料传播温度变化能力大小的指标，亦称导温系数。

边界条件
- I：边界温度 $t_w = const$
- II：热流密度 $q_w = const$
- III：规定与周围流体的 h, t_f：$h(t_w - t_f) = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w$
- IV 界面连续条件：$t_1 = t_2$，$\lambda_1\frac{\partial t}{\partial n} = \lambda_2\frac{\partial t}{\partial n}$

一维平壁导热

单层 多层

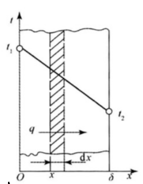
$$\left.\begin{matrix}\boxed{\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0} \rightarrow t = c_1x + c_2 \\ x=0,\ t=t_1;\ x=\delta,\ t=t_2\end{matrix}\right] \rightarrow \left(t = \frac{t_2 - t_1}{\delta}x + t_1\right) \rightarrow \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{t_2 - t_1}{\delta} \rightarrow q = -\lambda\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\lambda(t_1 - t_2)}{\delta} = \frac{\lambda}{\delta}\Delta t$$

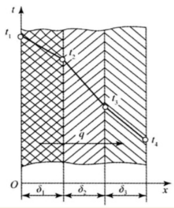
$$\Phi = \frac{A\lambda}{\delta}\Delta t = \frac{\Delta t}{R}$$

$\boxed{R = \frac{\delta}{A\lambda}：导热热阻 \quad r = \frac{\delta}{\lambda}：单位面积热阻}$

2. 多层平壁

所谓多层平壁，就是由几层不同材料叠加在一起组成的复合壁。讨论三层复合壁的导热问题，如图 2-2 所示。假设层与层间接触良好，没有引起附加热阻(亦称为接触热阻)，因此通过层间分界面时不会发生温度降落。



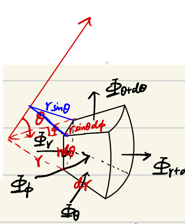


对多层平壁，当各层交界面接触良好时(即忽略接触热阻)，热流量和热流密度可按下式计算：

$$\begin{cases} \Phi = \dfrac{t_1 - t_{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\delta_i}{\lambda_i A}} & (2-11a) \\ q = \dfrac{t_1 - t_{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\delta_i}{\lambda_i}} & (2-11b) \end{cases}$$

导热热阻 [K/W]

单位面积热阻

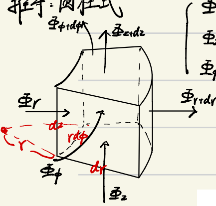


$$\begin{cases} \Phi_r - \Phi_{r+dr} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda\frac{\partial t}{\partial r}\cdot r^2\sin\theta d\theta d\phi\right]dr \\ \Phi_\theta - \Phi_{\theta+d\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\lambda\frac{\partial t}{r\partial \theta}\cdot r\sin\theta\, dr d\phi\right]d\theta \\ \Phi_\phi - \Phi_{\phi+d\phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left[\lambda\frac{\partial t}{r\sin\theta\partial \phi}\, r d\theta dr\right]d\phi \end{cases}$$

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}\cdot dr\cdot rd\theta\cdot r\sin\theta d\phi = \sum_{r\theta\phi}[\Phi_k - \Phi_{k+dk}] + \dot{\Phi}$$

$$\rightarrow \boxed{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right]} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\lambda\frac{\partial t}{\partial \theta}\sin\theta\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}\right) + \dot{\Phi}}$$

推导：圆柱式



$$\begin{cases} \Phi_r = -\lambda\frac{dt}{dr}dz\cdot rd\phi \\ \Phi_z = -\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\cdot dr\cdot rd\phi \\ \Phi_\phi = -\lambda\frac{\partial t}{r\partial \phi}\cdot drdz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{r+dr} = \Phi_r + \frac{\partial}{\partial r}\left[-\lambda r\frac{\partial t}{\partial r}dzd\phi\right]dr \\ \Phi_{z+dz} = \Phi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left[-\lambda r\frac{\partial t}{\partial z}drd\phi\right]dz \\ \Phi_{\phi+d\phi} = \Phi_\phi + \frac{\partial}{r\partial \phi}\left[-\lambda\frac{\partial t}{r\partial \phi}drdz\right]rd\phi \end{cases}$$

$$\therefore \rho c\cdot rd\phi dzdr\cdot\frac{\partial t}{\partial \tau} = \dot{\Phi}rd\phi drdz + \sum_{r\phi z}[\Phi_k - \Phi_{k+dk}]$$

$$\boxed{\therefore \rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}\right) + \dot{\Phi}}$$

(1)圆筒壁的温度分布。根据圆柱坐标系中的导热微分方程得常物性、稳态、一维、无内热源圆筒壁的导热微分方程为：

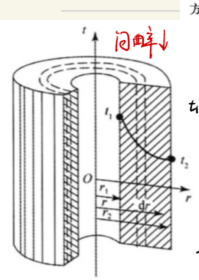
$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right) = 0}$$

如图 2-3 建立坐标系，圆筒边界条件为：当 $r = r_1$ 时，$t = t_1$；$r = r_2$ 时，$t = t_2$。

$\frac{dt}{dr} = \frac{C}{r}$　$t = C\ln r + k$

$\begin{cases} t_1 = C\ln r_1 + k \\ t_2 = C\ln r_2 + k \end{cases}$ ⇒ $C = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

间断↓



多层圆柱壁：

$$\Phi = \frac{2\pi l(t_1 - t_4)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\lambda_2} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{\lambda_3}}$$

$$q = -\lambda\frac{dt}{dr} = \frac{\lambda(t_1 - t_2)}{r\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

圆柱半径 r ↑ q 越小↓

因为面积↑ 总体 $\Phi = qA$ 不变

$$\Phi = qA = q\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{2\pi\lambda l(t_1 - t_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$\Phi = -\lambda A\frac{dt}{dr}$

斜率↓↓

则半径 r 越大，面积 A 越大，要保持 Φ = 常数，则有 $\left|\frac{dt}{dr}\right|$ 越小，即曲线的斜率在半径越大的地方越小，故应为图 2-2 中的实线 a。注意这种分析曲线凹向的方法在以后的章节中还会出现，读者应掌握这种方法。

导热热阻：$\boxed{R = \frac{\ln(d_2/d_1)}{2\pi\lambda l}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi l\lambda}$　$r = \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda}$

3. 通过球壳的导热

教材式(2－31)～(2－33)给出了空心球壳内一维稳态、无内热源、常物性时的温度分布及热流量等。若应用傅里叶定律，可有：

A球

$$\Phi=-\lambda A\frac{dt}{dr}=-\lambda 4\pi r^2\frac{dt}{dr}=\text{常数}$$

分离变量后积分，可得：

$$\Phi\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{4\pi r^2}=-\lambda\int_{t_1}^{t_2}dt$$

$$R=\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda}$$

即：

$$\boxed{\Phi=\frac{4\pi\lambda(t_1-t_2)}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}}\qquad(2-15)$$

$$q=\frac{\lambda(t_1-t_2)}{\left(\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}\right)r^2}$$

对 $\lambda=\lambda_0(1+bt)$ 的情形，有 $\bar\lambda=\lambda\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=\lambda_0\left(1+b\frac{t_1+t_2}{2}\right)$。

热问题，当 $\lambda=\lambda_0(1+bt)$ 时，$b>0$，$b=0$，$b<0$ 时平壁内的温度分布分别对应于图中的曲线③，②，①。请读者自行证明。

$\Phi=const=-A\lambda(t)\left(\frac{dt}{dx}\right)$

$b>0$ 时　$x\uparrow$ $t\downarrow$ $\lambda\downarrow$ $\therefore \frac{dt}{dx}\uparrow$ 陡

$b<0$ 时　$x\uparrow$ $t\downarrow$ $\lambda\uparrow$ $\therefore \frac{dt}{dx}\downarrow$

(三)变截面或变导热系数的一维问题

前面几种情况的求解方法，都是先求解导热微分方程得其温度分布，然后按傅里叶导热定律获得热流密度和导热热流量，这是用分析法求解导热问题的一般顺序。根据傅里叶定律求解导热系数为变数或导热截面积沿热流密度矢量方向为变量时，可以采用直接对傅里叶导热定律表达式做积分的方法。

导热系数一般可表示为温度的函数 $\lambda(t)$，一维问题傅里叶定律的表达式为：

$$\Phi=-A\lambda(t)\frac{dt}{dx}$$

分离变量后积分，而热流量 Φ 与 x 无关，得：

$$\Phi\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{A}=-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt$$

方程右边乘以 $(t_2-t_1)/(t_2-t_1)$ 得：

$$\Phi\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{A}=\frac{-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt}{(t_2-t_1)}(t_2-t_1)$$

显然式中 $\boxed{\frac{\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt}{(t_2-t_1)}}$ 项是在 t_1 至 t_2 范围内，$\lambda(t)$ 的积分平均值，可用 $\bar\lambda$ 表示，则：

$$\Phi=\frac{\bar\lambda(t_1-t_1)}{\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{A}}$$

对球　$\Phi=\frac{\lambda(t_1-t_2)}{\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{4\pi r^2}}=\frac{4\pi\lambda(t_1-t_2)}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}$

对柱　$\Phi=\frac{\lambda(t_1-t_2)}{\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{2\pi rl}}=\frac{2\pi\lambda l(t_1-t_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$

$\bar\lambda$ 代替 $\frac{-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt}{(t_2-t_1)}$ 不受到 A 与 x 关系的制约，所以适于任何的 A、x，只要把具体问题的 A 与 x 的关系代入上式，就可得到适用于具体情况的计算公式。

在方程中若 $\lambda=\lambda_0(1+bt)$ 或 $\lambda=\lambda_0+at$，$\bar\lambda$ 是算术平均温度下 $t=(t_1+t_2)/2$ 的值，只需把前述公式的 λ 取平均温度下的值即可。

肋片

(二)通过等截面直肋的导热

$m=\sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}$　$\theta=\theta_0\frac{ch(m(x-H))}{ch(mH)}$　$\theta_H=\theta_0/ch(mH)$　$\Phi_{x=0}=\sqrt{hP\lambda A_c}\,\theta_0\,th(mH)$

如图 2-4 所示，取出一个肋片来分析。已知肋根温度为 t_0，周围流体温度为 t_∞，且 $t_0>t_\infty$。肋片与周围环境有热交换，包括对流传热和辐射换热的复合换热的表面传热系数为 h。要确定肋片中的温度分布及通过肋片的散热量。分析图如图 2-5、2-6 所示。

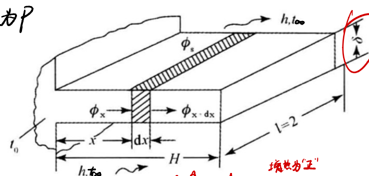
肋片方程：$\boxed{\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{\dot\Phi}{\lambda}=0}$　源项

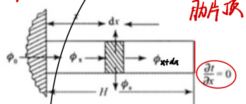
边界：$x=0$，$t=t_0$；$x=H$，$\frac{dt}{dx}=0$

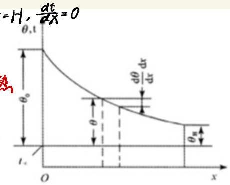
参与换热的截面周长为 P

$H'=H+\delta/2$

肋片顶绝热







$ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

求解源项 $\dot\Phi$：　$\Phi_s=Pdx\cdot h(t-t_\infty)\longrightarrow\boxed{\dot\Phi=\frac{-\Phi_s}{A_c\cdot dx}}=-\frac{hP(t-t_\infty)}{A_c}\longrightarrow\boxed{\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{hP(t-t_\infty)}{\lambda A_c}}$

散出能量　源项为"-"

设 过余温度 $\theta=t-t_\infty$　$\because\begin{cases}\frac{d^2\theta}{dx^2}=m^2\theta,\ m=\sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}\\ x=0,\ \theta=\theta_0=t_0-t_\infty;\ x=H,\ \frac{d\theta}{dx}=0\end{cases}\longrightarrow\theta=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx}\longrightarrow\boxed{\theta=\theta_0\frac{ch[m(x-H)]}{ch(mH)}}$

取 $x=H$ 肋顶：$\boxed{\theta_H=\frac{\theta_0}{ch(mH)}}$

$th(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

肋片散入外界的全部热流量 $(x=0)$

$$\Phi_{x=0}=-\lambda A_c\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0}=\frac{hP}{m}\theta_0\,th(mH)=\sqrt{hP\lambda A_c}\cdot\theta_0\,th(mH)$$

若末端面散热，则用假想高度 $\boxed{H'=H+\frac{\delta}{2}}$ 代替　$\left(H'=H+\frac{A_c}{P}\right)$

η_f

用肋效率来表征肋片散热有效程度，定义为 η_f＝实际散热量/假设整个肋表面处于肋基温度下的散热量。对于等截面直肋，其肋效率为

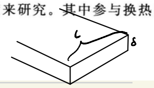
$$\eta_f=\frac{\frac{hP}{m}\theta_0 th(mH)}{hPH\theta_0}=\boxed{\frac{th(mH)}{mH}}$$

实际散热
假设 θ_0 的散热

对于直肋，肋片长度 l 比其厚度 δ 要大得多，可以取出单位长度来研究。其中参与换热的周界 $P=2$，于是有

$l>>\delta$

$$mH=\sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}H=\sqrt{\frac{2h}{\lambda\delta}}H$$



如图 2－9 所示，由于 th(mH)在 0～1 之间变化，因而，当 mH 越大，肋效率 η_f 下降。

η_f 与 mH 反比　$m=\sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}$

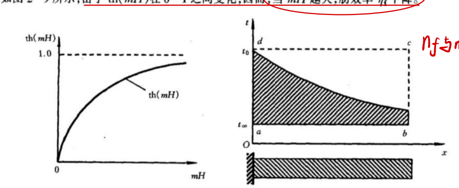


图 2－9　th(mH)随 mH 的变化　　图 2－10　肋效率物理意义示意图

① 当肋高 H 增加时，mH 增大，η_f 减小。这说明肋高并非越高越好。

② 肋片的导热系数 λ 增加，mH 减小，肋效率增加。这相当于增加图 2－10 中阴影部分的面积。

$\lambda\uparrow\ \eta_f\uparrow$

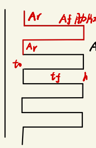
③ 当肋厚增加时，与增大 λ 的效果一样，同样使肋效率增加。

注意：增加 λ 和 δ 之值都使得肋表面沿肋高方向的温度更接近于肋根温度，即沿肋高方向的导热热阻减小，从而沿肋高方向温度降减小，故肋效率增加。如何合理选择肋片的高度、厚度、间距和材料等应从总散热效果来评定。

$\lambda,\delta\uparrow\ \eta_f\uparrow$　　$H\uparrow\ \eta_f\downarrow$

肋厚

肋面总效率



$A_0=A_f+A_r$

$\Phi=A_rh(t_0-t_f)+\eta_f\cdot A_fh(t_0-t_f)=h(t_0-t_f)(A_r+\eta_fA_f)$

$=A_0h(t_0-t_f)\cdot\eta_0$

$\boxed{\text{总效率 }\eta_0=\frac{A_r+\eta_fA_f}{A_r+A_f}}>\eta_f$

3. 肋片换热量的计算

肋片换热量的计算一般由以下三步组成：

① 根据已知参数计算肋效率 η_f；

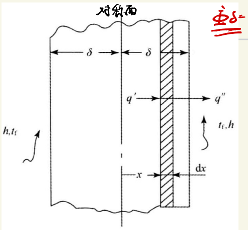
② 假定肋表面温度与肋基温度相等，计算理想换热量 $\Phi_{理}$；

③ 根据肋效率的定义计算肋片实际换热量，即 $\Phi=\eta_f\Phi_{理}$。

内热源的一维导热：$\boxed{\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0}$

边界 $\begin{cases} x=0, & \frac{dt}{dx}=0 \\ x=\delta, & -\lambda\frac{dt}{dx}=h(t-t_f) \end{cases}$

$\dot{\Phi}\delta=h(t-t_f)$

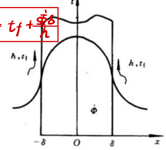


将 c_1、c_2 代入通解中则可解得在该条件下平板中的温度分布：

$x=\delta$ 时壁温 $\boxed{t_w=t_f+\frac{\dot{\Phi}\delta}{h}}$

$$t=\frac{\dot{\Phi}}{2\lambda}(\delta^2-x^2)+\frac{\dot{\Phi}}{h}\delta+t_f$$

→ 抛物点



根据傅里叶定律可得出平板中任意位置 x 处的热流密度：

$$\boxed{q=-\lambda\frac{dt}{dx}=\dot{\Phi}x}$$

热流密度不是常数

与无内热源导热问题的比较：①无内热源的平壁导热，其内温度成线性分布；而有内热源的平壁导热，其内温度成抛物线分布；②无内热源的平壁导热，其通过板内任意断面的热流密度相等，即 $q=\text{con }st$，而有内热源的平壁导热，其通过板内任意断面的热流密度不等。

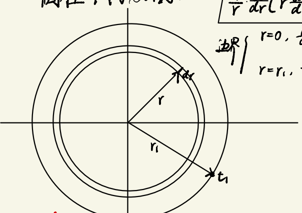
$q=\dot{\Phi}x$

圆柱+内热源

$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right)+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0}$

边界 $\begin{cases} r=0, & \frac{dt}{dr}=0 \\ r=r_1, & t=t_1 \end{cases}$ → $\boxed{t=\frac{1}{4}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}(r_1^2-r^2)+t_1}$

中心 $t_{max}=t_1+\frac{\dot{\Phi}r_1^2}{4\lambda}$



$\eta_f=\frac{th(mH)}{mH}$

【2-1】（华中科技大学 2006 年考研试题）写出肋效率 η_f 的定义。对于等截面直肋，肋效率受哪些因素影响？

解：肋效率 η_f 的定义：肋表面的实际散热量与假设整个肋表面处于肋基温度时的散热量的比值。对于等截面直肋，$\eta_f=\frac{\text{th}(mH)}{mH}$，其中 $m=\sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}$，影响因素：材料的导热系数 λ；肋表面的换热系数 h；肋片高度等尺寸因素。

【2-2】（华中科技大学 2005 年考研试题）试说明推导导热微分方程所依据的基本定律。

能量守恒+傅利叶

解：能量守恒方程和傅里叶定律。

λ, a 【2-3】（华中科技大学 2005 年考研试题）导热系数和热扩散系数各自从什么公式产生？它们各自反映了物质的什么特性？并指出它们的差异。

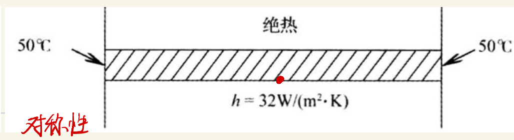
$a=\frac{\lambda}{\rho c}$ （导温） λ 静态 ⟷ a 动态

解：导热系数是从傅里叶定律定义出来的一个物性量，它反映了物质的导热性能，热扩散系数是从导热微分方程式定义出来的一个物性量，它放映了物质的热量扩散性能，也就是热流在物体内的渗透的快慢程度。两者的差异在于前者是导热过程的静态特性量，而后者则是导热过程的动态特性量，因而扩散系数反映的是非稳态导热过程的特征。

【2-4】（华中科技大学 2004 年考研试题）在圆管外表加装肋片，就一定能够增强传热吗？为什么？

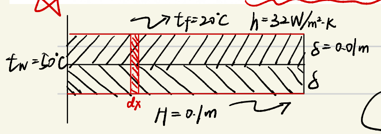
解：不一定。因为加装肋片会增大流动阻力，对于不同流体，其综合影响不一定增强传热。

【2-5】（华中科技大学 2004 年考研试题）如图 2-8 所示，一厚度为 10mm、导热系数为 50W/(m·K)的不锈钢板，两端维持固定温度 50℃，已知钢板两端之间的距离为 20cm，在垂直纸面方向很长。钢板上表面绝热，下表面有 20℃的空气缓慢流动，对流表面传热系数为 32W/(m²·K)。试导出此钢板的导热微分方程，求解所导出的方程得出温度分布，并求出钢板中心的温度值。双曲函数的相关数值如表 2-1 所示。



对称性

解：由于对称性，此问题等效为原厚度两倍，长度一半的肋片问题。



$\lambda=50W/m\cdot K$

$\frac{P}{A_c}=\frac{2L+4\delta}{2L\delta}\ (L\to\infty)=\frac{1}{\delta}$

$\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0$ $\quad \Phi_s=Pdx\cdot h(t-t_f)$ $\quad \dot{\Phi}=\frac{-\Phi_s}{A_c dx}$

$mH=0.1\times\sqrt{\frac{32}{50\times0.01}}=0.8$

$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{hP}{\lambda A_c}(t-t_f)\xrightarrow{\theta=t-t_f}\frac{d^2\theta}{dx^2}=\frac{h}{\lambda\delta}\theta=m^2\theta$ $\quad \therefore m=\sqrt{\frac{h}{\lambda\delta}}$ $\quad \theta_0=t_w-t_f=30°C$

$\theta=\theta_0\frac{ch(m(x-H))}{ch(mH)}$ $\quad$ 原中心即端部 $\theta_H=\frac{\theta_0}{ch(mH)}=\frac{30°C}{ch(0.8)}=22.39°C$

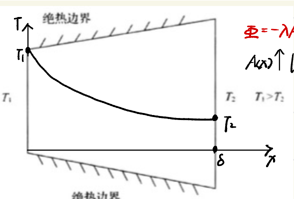
【2-6】（西安交通大学 2005 年考研试题）常物性、无内热源的稳态导热方程 $\nabla^2t=0$ 中不包含任何物性量，这是否说明导热物体中的温度分布与导热物体的物性无关，为什么？

$\lambda=const$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dt}{dx}\right)$

答：常物性、无内热源的导热微分方程公式是导热微分方程的一般形式的简化结果，公式中只有在物体的导热率为常数时，才能简化为 $\nabla^2t=0$。若导热系数不为常数，则上式便不成立。故上式不能说明物体中的温度分布与物性无关。

可能 $\lambda=\lambda(t)$

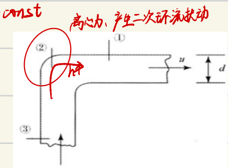
【2-7】（西安交通大学 2004 年考研试题）定性绘出在稳态导热条件如图 2-9 所示物体内的温度分布并说明理由。设物体导热系数 λ 为常数。



$\dot{\Phi}=-\lambda A(x)\frac{dt}{dx}=const$

$A(x)\uparrow\ \left|\frac{dt}{dx}\right|\downarrow$

离心力、产生二次环流扰动



【2-8】（西安交通大学 2003 年考研试题）用套管式温度计测量管道中流体的温度，为减小测温误差。

（1）若有铜和不锈钢两种材料，用哪一种做套管较好？为什么？

（2）将套管温度计安装在图 2-10 中①、②、③哪个位置较好？为什么？

解：温度计套管产生误差的主要原因是由于沿肋高（即套管长度方向）有热量导出和套管表面与流体之间存在换热热阻。因而要减小温度计套管的测温误差，可以选择导热系数小的材料，增加导热热阻，故选不锈钢。

套管温度计安装在②处比较好，因为流体在流过②处时，由于离心力的作用，在横截面上产生了二次环流，增加了扰动，从而强化了换热，对应的 h 增加，从而使测温误差减小。

【2-11】（北京科技大学 2007 年考研试题）半径为 r_s 的圆球，其热导率（导热系数）为 λ，单位体积发热量为 $\dot{\Phi}$，浸在温度为 t_f 的流体中，流体与球表面间的对流传热系数为 h。求稳态时圆球内的温度分布，并计算当 $r_s=0.1\text{m}$，$\lambda=4.5\text{W/(m·K)}$，$\dot{\Phi}=5000\text{W/m}^3$，$h=15\text{W/(m}^2\text{·K)}$，$t_f=20℃$ 时，球内的最高温度。

导热方程

$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\lambda r^2\frac{dt}{dr}\right)+\dot{\Phi}=0}$ $\quad \frac{d}{dr}\left(\lambda r^2\frac{dt}{dr}\right)=-\dot{\Phi}r^2$

① 边界：$r=r_s$ 时 $-\lambda\frac{dt}{dr}=h(t-t_f)$；$r=0$ 时 $\frac{dt}{dr}=0$

$\lambda r^2\frac{dt}{dr}=-\frac{1}{3}\dot{\Phi}r^3+C_0$

$C_0=0$

$\therefore \frac{dt}{dr}=-\frac{1}{3}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}r$

$-\lambda\left(-\frac{1}{3}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}r_s\right)=h\left(-\frac{1}{6}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}r_s^2+C_1-t_f\right)$

$t=-\frac{1}{6}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}r^2+C_1$

$\boxed{C_1=\frac{1}{3}\frac{\dot{\Phi}}{h}r_s+\frac{1}{6}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}r_s^2+t_f}$

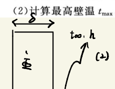
→ $\boxed{t=\frac{1}{6}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}(r_s^2-r^2)+\frac{1}{3}\frac{\dot{\Phi}}{h}r_s+t_f}$ $\quad$ 最高温度在 $r=0$ 处 $t_0=\cdots$

② 或由热平衡 $\boxed{\frac{4}{3}\pi r^3\dot{\Phi}=-\lambda\cdot4\pi r^2\frac{dt}{dr}}$ $\quad$ 体积法

【2-13】（上海交通大学 2002 年考研试题）厚 $\delta=10\text{cm}$、内热源 $\dot{\Phi}=3\times10^4\text{W/m}^3$ 的大平壁的一个表面 $x=0$ 为绝热面，另一个表面 $x=\delta$ 暴露于 $t_\infty=25℃$ 的空气之中。已知空气与壁面之间的对流传热系数 $h=50\text{W/m}^2$，壁的导热系数 $\lambda=3\text{W/(m·K)}$。

（1）写出平壁的稳态导热微分方程及边界条件。

（2）计算最高壁温 t_{max}。



(1) $\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0$ $\quad$ 边界 $\begin{cases} x=0 & \frac{dt}{dx}=0 \\ x=\delta & \boxed{\dot{\Phi}\delta=h(t-t_\infty)} \end{cases}$ $\quad t=t_\infty+\frac{\dot{\Phi}\delta}{h}$ $\quad$ 含 $\dot{\Phi}$ 的边界

(2) $t=-\frac{1}{2}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}x^2+C_1x+C_2$

$C_1=0$

$-\frac{1}{2}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}\delta^2+C_2=t_\infty+\frac{\dot{\Phi}\delta}{h}\rightarrow C_2=t_\infty+\frac{\dot{\Phi}\delta}{h}+\frac{1}{2}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}\delta^2$

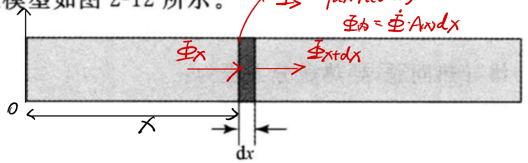
$\boxed{t=\frac{1}{2}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}(\delta^2-x^2)+t_\infty+\frac{\dot{\Phi}\delta}{h}}$ $\quad t_{max}=t_{x=0}=\cdots$

【2-14】（上海交通大学 2002 年考研试题）试导出具有内热源 $\dot{\Phi}$、变截面 $A(x)$、变导热系数 $\lambda(t)$、截面周长为 P 的细杆状扩展体一维稳态导热问题的温度场微分方程式（不需展开和化简）。

解：本问题的简化模型如图 2-12 所示。

$\Phi_s = P dx\, h(t-t_\infty)$

$\Phi_内 = \dot{\Phi} A(x) dx$



分析如图所示的微元块，根据傅里叶定律可知，微元段的导入热为：

$$\Phi_x = -\lambda(t)A(x)\frac{dt}{dx}$$

微元段的导出热为：

$$\boxed{\Phi_{x+dx} = -\left[\lambda(t)+\frac{\partial\lambda}{\partial t}dt\right]\left[A(x)+\frac{\partial A}{\partial x}dx\right]\frac{d}{dx}\left(t+\frac{\partial t}{\partial x}dx\right)}$$

微元段内热源的生成热为：

$$\Phi_r = \dot{\Phi}A(x)dx$$

微元段表面换热量为：

$$\Phi_s = Pdxh(t-t_\infty)$$

根据能量守恒，可得热平衡方程为：

$$\Phi_x - \Phi_{x+dx} + \Phi_r - \Phi_s = 0$$

【2-15】（上海交通大学 2001 年考研试题）一长为 L 的薄板，两端分别接于温度为 T_1 与 T_2 的墙壁上，板以对流方式将热量传给温度为 T_∞ 的周围流体，假定 $T_1>T_2>T_\infty$，板与周围流体间的对流传热系数为 h，板的导热系数为 λ，板的横截面面积为 A，横截面的周长为 P，试推导出：①板的温度分布；②板的散热量。

解：

（1）本问题的简化模型如图 2-13 所示。

$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0$

$\Phi_s = Pdx\cdot h(t-t_\infty)$

$\dot{\Phi} = \frac{-\Phi_s}{A\cdot dx}$

$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{hP}{\lambda A}(t-t_\infty) \xrightarrow{\theta = t-t_\infty} \frac{d^2\theta}{dx^2} = m^2\theta$

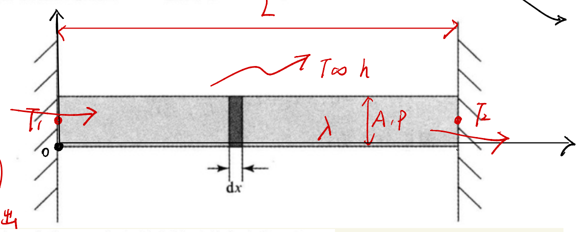
$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$　边界 $\begin{cases} x=0 & \theta=\theta_0=t_1-t_\infty \\ x=L & \theta=\theta_L=t_2-t_\infty \end{cases}$

$\boxed{\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}}$

总散热：

$\Phi_散 = \left(-\lambda A\frac{dt}{dx}\Big|_{x=0}\right) - \left(-\lambda A\frac{dt}{dx}\Big|_{x=L}\right)$

从0处进 − 从L处出



根据定解条件可得：

$$c_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1 e^{-mL}}{e^{mL}-e^{-mL}},\quad c_2 = \frac{\theta_1 e^{mL} - \theta_2}{e^{mL}-e^{-mL}}$$

由此可得板的温度分布为：

$$\theta = \theta_2\frac{\mathrm{sh}(mx)}{\mathrm{sh}(mL)} + \theta_1\frac{\mathrm{sh}[m(L-x)]}{\mathrm{sh}(mL)}$$

（2）对上式求导，可得：

$$\frac{d\theta}{dx} = m\theta_2\frac{\mathrm{ch}(mx)}{\mathrm{sh}(mL)} - m\theta_1\frac{\mathrm{ch}[m(L-x)]}{\mathrm{sh}(mL)}$$

根据导热基本定律以及能量守恒可知，板的散热量为：

$$\Phi = \lambda A\left(\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} - \frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0}\right) = \lambda Am(\theta_1+\theta_2)\frac{\mathrm{ch}(mL)-1}{\mathrm{sh}(mL)}$$

【2-17】（上海交通大学 2000 年考研试题）有均匀内热源的无限大平板稳态导热的边界条件及温度分布如图 2-15 所示。

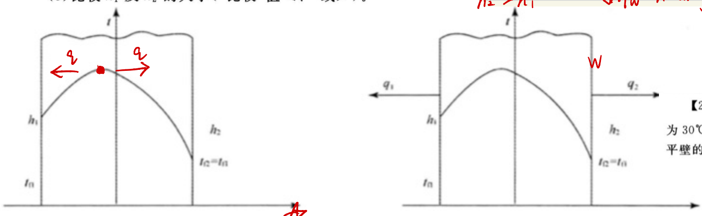
（1）画出 q_1 及 q_2 的方向。

（2）比较 q_1 及 q_2 的大小。

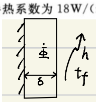
（3）比较 h_1 及 h_2 的大小（"比较"值<、=或>）。

$|q| = \lambda A\left|\frac{dt}{dx}\right|$　看斜率　$q_2 > q_1$

$h_2 > h_1$　$-\lambda A\frac{dt}{dx}\Big|_w = h(t_w - t_f)$



【2-21】（东南大学 2002 年考研试题）一个厚度 7cm 的平壁，一侧绝热，另一侧暴露于温度为 30℃的流体中，内热源 $\dot{\Phi}=0.3\times10^6\,\mathrm{W/m^3}$。对流传热表面的传热系数为 $450\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$，平壁的导热系数为 $18\mathrm{W/(m\cdot K)}$。试确定平壁中的最高温度及其位置。



$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0 \longrightarrow t = -\frac{1}{2}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}x^2 + c_1x + c_2$

边界 $\begin{cases} x=0 & \frac{dt}{dx}=0 \\ x=\delta & \dot{\Phi}\delta = h(t-t_f) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}\delta^2 + c_2 = \frac{\dot{\Phi}\delta}{h} + t_f \end{cases}$

$\boxed{t = \frac{1}{2}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}(\delta^2 - x^2) + t_f + \frac{\dot{\Phi}\delta}{h}}$

【2-19】（东南大学 2002 年考研试题）名词解释：接触热阻。

答：如图 2-19 所示，两个名义上互相接触的固体表面，实际上接触仅发生在一些离散的面积元上，在未接触的界面之间的间隙中充满空气，热量将以导热的方式穿过这种气隙层。这种情况下与两固体表面真正完全接触相比，增加了附加的传递阻力，称为接触热阻。

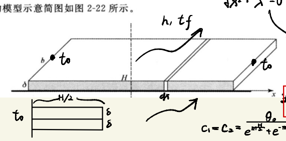
接触面实际上在界面之间存在间隙，其中充满空气，在传热过程中作为附加热阻，增加了传热阻力

图 2-19

【2-24】（东南大学 2000 年考研试题）一长为 H，宽为 b，厚度为 δ 的铝板水平放置（$b\gg\delta$），长度方向两端温度均为 t_0，底面绝热，周围空气的温度为 t_f，与铝板的对流传热系数为 h。设铝板的热导率为 λ，求铝板的温度分布。（肋板）

$\begin{cases} P = 2(b+\delta) \\ A = b\delta \end{cases}$

解：本题的模型示意简图如图 2-22 所示。



$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0$　$\Phi_s = Pdx\cdot h(t-t_f)$

$\dot{\Phi} = \frac{-\Phi_s}{A\cdot dx}$

$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{Ph}{\lambda A}(t-t_f) = \frac{h}{\lambda\delta}(t-t_f)$

$m = \sqrt{\frac{h}{\lambda\delta}} \rightarrow \theta = c_1e^{mx} + c_2e^{-mx}$

$\boxed{边界 \begin{cases} x=0 & \frac{d\theta}{dx}=0 \\ x=H/2 & \theta = t_0 - t_f \end{cases}}$

$c_1 = c_2 = \frac{\theta_0}{e^{m\frac{H}{2}} + e^{-m\frac{H}{2}}}$

【2-23】（东南大学 2000 年考研试题）半径为 r_s 的圆球，其热导率（导热系数）为 λ，单位体积发热量为 $\dot{\Phi}$，浸在温度为 t_f 的流体中，流体与球表面间的对流换热系数为 h。求稳态时：

（1）圆球内的温度分布。

（2）当 $r_s=0.1\mathrm{m}$，$\lambda=4.5\mathrm{W/(m\cdot K)}$，$\dot{\Phi}=5000\mathrm{W/m^3}$，$h=15\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$，$t_f=20$℃时，球内的最高温度。

(1) $\frac{4}{3}\pi r^3\dot{\Phi} = -\lambda\cdot4\pi r^2\frac{dt}{dx} \longrightarrow -\frac{1}{3}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}r^2 = \frac{dt}{dx} \rightarrow t = -\frac{1}{6}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}r^3 + C$

边界：$\boxed{x = r_s,\ \dot{\Phi}\cdot\frac{4}{3}\pi r_s^3 = h\cdot4\pi r_s(t_s - t_f)} \rightarrow t_s = \frac{\dot{\Phi}r_s^2}{3h} + t_f \rightarrow C = \frac{1}{6}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}r_s^3 + \frac{\dot{\Phi}}{3h}r_s^2 + t_f$

$t = \frac{1}{6}\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}(r_s^3 - r^3) + \frac{\dot{\Phi}r_s^2}{3h} + t_f$

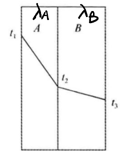
【2-25】（浙江大学 2006 年考研试题）肋面总效率的数学表达式为 $\eta_0=\frac{A_r+\eta_f A_f}{A_r+A_f}>\eta_f$

答案：$\eta_0=\frac{A_r+\eta_f A_f}{A_r+A_f}$，其中，$A_r$ 为两个肋片之间的根部表面积，A_f 为肋片的表面积，η_f 为肋效率

【2-26】（浙江大学 2005 年考研试题）肋效率的定义是 实际 / 假设整体 t_0，当肋片高度为 0 时肋效率 η_f 达到 100%。 mH

答案：$\eta_f=\frac{\text{实际散热量}}{\text{假设整个肋表面处于肋基温度下的散热量}}$　　零　　$\frac{th(mH)}{mH}$

【2-27】（浙江大学 2005 年考研试题）如图 2-23 所示的双层平壁中的稳态温度分布判断两种材料的导热系数相对大小为 $\lambda_A<\lambda_B$



$-\lambda A\frac{dt}{dx}$

【2-28】（浙江大学 2004 年考研试题）导热微分方程的推导依据是 傅里叶 和 能量守恒，直角坐标下一维，非稳态、无内热源导热问题的导热微分方程可以表示成 $\rho c_p\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})$

【2-29】（浙江大学 2004 年考研试题）如果测得通过一块厚 50mm 的大木板的热流密度为 40W/m²，木板两侧的表面温度分别为 40℃和 20℃，则该木板的导热系数为 0.1W/m·K；若将加热热流密度提高到 80W/m²，该木板的一侧表面温度为 25℃，则另外一侧的表面温度应为 65℃

$\delta=50mm$　$q=+\lambda\frac{\Delta t}{\delta}\rightarrow 40W/m^2=\lambda\frac{20K}{0.05m}\rightarrow 0.1$

【2-30】（浙江大学 2001 年考研试题）描述导热物体内部温度扯平能力的物性量叫 热扩散率，它由 λ,ρ,c 物性量决定，其定义式为 $a=\frac{\lambda}{\rho c}$。

答案：热扩散率　　物体的导热系数 λ、密度 ρ、比热容 c　　$a=\frac{\lambda}{\rho c}$

【2-31】（浙江大学 2001 年考研试题）确定导热微分方程的定解条件中有边界条件，常用的有三种：

第一类边界条件为 $t_w=const$；

第二类边界条件为 $q_w=const$；

第三类边界条件为 $-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}=h(t-t_f)$。

答案：规定了边界上的温度值　　规定了边界上的热流密度值　　规定了边界上物体与周围流体间的表面传热系数 h 以及周围流体的温度 t_f

【2-32】（浙江大学 2001 年考研试题）在求解导热热阻时，常碰到变导热系数 $\lambda(t)$ 的情况。当材料的导热系数为温度的线性函数，常取 算术平均温度 导热系数作为平均导热系数。

答案：材料定型温度，即算数平均温度

【2-33】（浙江大学 2000 年考研试题）肋片效率 η_f 是 $\frac{th(mH)}{mH}$。

答案：实际散热量与假设整个肋表面处于肋基温度下的散热量的比值

【2-34】（浙江大学 2000 年考研试题）导温系数 a 描述了物体 传播温度变化 的能力。

答案：传播温度变化

【2-35】（浙江大学 2005 年考研试题）有个复合炉墙由三层材料组成，其中 A、C 两种材料的导热系数和厚度已知，分别为：$k_A=20W/(m\cdot K)$，$k_C=50W/(m\cdot K)$，$L_A=0.30m$，$L_C=0.15m$，处于中间层的材料 B 的厚度为 0.15m。稳态条件下炉墙两侧裸露表面的温度已知，分别为，$T_{s,o}=20℃$，$T_{s,i}=600℃$，炉内烟气的复合传热系数为 $25W/(m^2\cdot K)$，烟气温度 $T_\infty=800℃$，试问：

$q=h(T_\infty-T_{s,i})=200\times25=5000W/m^2$

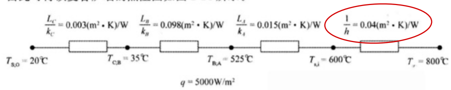
（1）材料 B 的导热系数是多少？

（2）画出该复合炉墙的热阻图，并在图上标出各个节点的温度、热流量和热阻的大小。

(1) $q=\frac{T_{s,i}-T_{s,o}}{R}=\frac{580K}{L_A/k_A+L_C/k_C+L_B/\lambda_B}\rightarrow\lambda_B=1.53W/m\cdot K$

(2)

由此可得该复合炉墙的热阻图如图 2-24 所示。



【2-37】（上海九校联考 2002 年考研试题）一块大平板，厚度 $\delta=5cm$，有内热源 $\dot\Phi$，平板中的一维稳态温度分布为 $t=b+cx^2$，式中 $b=200℃$，$c=-200K/m^2$。假定平板的导热系数 $\lambda=50W/(m\cdot K)$，试确定：

（1）平板中内热源 $\dot\Phi$ 之值。

（2）$x=0$ 和 $x=\delta$ 边界处的热流密度。

$\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{\dot\Phi}{\lambda}=0\rightarrow t=-\frac{1}{2}\frac{\dot\Phi}{\lambda}x^2+cx$

$c=-\frac{1}{2}\frac{\dot\Phi}{\lambda}\rightarrow\dot\Phi=-2c\lambda=20000W/m^3$

(2) $\frac{dt}{dx}=2cx$　$q_{x=0}=-\lambda\frac{dt}{dx}\Big|_{x=0}=0$　$q_{x=\delta}=-\lambda\frac{dt}{dx}\Big|_{x=\delta}=-\lambda\cdot2c\delta=1000W/m^2$

【2-41】（湖南大学 2006 年考研试题）试将圆筒壁的热阻与同材料、同厚度的平壁的热阻进行比较，如果温度条件相同，而平面的面积等于圆筒壁的内表面，则（A）是正确的。

A. 平壁的热阻较小　　$A=\pi d_1 l$　　B. 平壁的热阻较大

C. 二者的热阻相等　　D. 缺少条件，不好比较

答案：A　　$R_1=\frac{\delta}{A\cdot\lambda}=\frac{\delta}{\pi\lambda d_1 l}$　/　$R_2=\frac{1}{\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{2\pi r l}=\frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi\lambda l}=\frac{\ln(1+\frac{2\delta}{d_1})}{2\pi\lambda l}>R_1$

解析：设圆筒内壁的直径为 d_1，圆筒和平壁的厚度为 δ，则圆筒外壁的直径为 $d_2=2\delta+d_1$。该材料的导热系数为 λ，圆筒和平壁的长度为 l。

半径，直径

平壁的导热热阻为：

$$R_1=\frac{\delta}{\pi d_1\lambda l}$$

圆筒壁的导热热阻为：

$$R_2=\frac{\ln(d_2/d_1)}{2\pi\lambda l}=\frac{\ln\left(1+\frac{2\delta}{d_1}\right)}{2\pi\lambda l}>R_1$$

【2-46】（南京航空航天大学 2000 年考研试题）已知平壁两侧温度分别为 T_1 和 T_2，壁厚为 δ，材料的导热系数与温度的关系为 $\lambda=\lambda_0(1+bT)$，λ_0 和 b 为常数，无内热源。试求通过平壁的热流密度表达式。

解：根据傅里叶定律：

$$q=-\lambda\frac{dT}{dx}=-\lambda_0(1+bT)\frac{dT}{dx}$$

整理上式，并在等式两边积分可得：

$$q\int_0^\delta dx=\int_{T_1}^{T_2}-\lambda_0(1+bT)dT$$

进一步整理可得通过平壁的热流密度的表达式为：

$$q=\frac{\lambda_0}{\delta}\left(T+\frac{b}{2}T^2\right)\Big|_{T_2}^{T_1}=\frac{\lambda_0}{\delta}(T_1-T_2)\left\{1+\frac{b}{2}(T_1+T_2)\right\}$$

【2-43】（湖南大学 2006 年考研试题）什么是肋片效率 η_f？它与肋面总效率 η_0 有何不同？

解：肋片效率 η_f 的物理意义：

$$\eta_f=\frac{\text{实际散热量}}{\text{假设整个肋表面处于肋基温度下的散热量}}$$

肋面总效率 η_0 定义式为：$\eta_0=\frac{A_r+\eta_f A_f}{A_r+A_f}$。其中 A_r 为两个肋片之间的根部表面积，A_f 为肋片的表面积。 $>\eta_f$

显然，肋面总效率 η_0 高于肋片效率 η_f。

【2-44】（湖南大学 2006 年考研试题）简述导热系数 λ 的物理意义，并说明温度升高时纯金属的导热系数的大小变化趋势如何？为什么？

金属：$T\uparrow$ $\lambda\downarrow$

合金 → 晶格振动为主　$T\uparrow$ $\lambda\uparrow$

解：导热系数的定义式由傅里叶定律的数学表达式给出：$\lambda=\frac{|\vec{q}|}{\left|\frac{\partial t}{\partial x}\vec{n}\right|}$。

在数值上，它等于在单位温度梯度作用下的物体内热流密度矢量的模。导热系数的值取决于物质的种类和温度等因素。

纯金属的导热系数随着温度升高而降低。这是因为金属的导热依赖于自由电子的定向移动，而温度升高加剧了电子的无规则运动，这不利于导热。

【2-45】（南京航空航天大学 2000 年考研试题）对于一等截面直肋，设肋根温度为 T_0，周围介质温度为 T_f，且 $T_0>T_f$。试定性画出沿肋高方向的温度分布，并扼要分析在设置肋片时，肋片高度是否越长越好。　$H\uparrow$ $m\uparrow$

解：沿肋高方向的温度分布如图 2-28 所示。

由此可见，肋片散热量与 mH 的双曲正切成正比，考虑到双曲正切的函数特性有：

$$th(mH)<1$$

并且，当 $mH=1.5$ 时，$th(mH)>0.9$。由此可见，如果进一步增加肋高，对增加散热量的贡献不大。此外，肋片的散热效率随着肋片高度增加反而降低。考虑到增加肋片高度，还会增加换热器体积、重量、成本。在设置肋片时，并非肋片高度越长越好。

$H\uparrow$ $m\uparrow$ $\eta_f\downarrow$

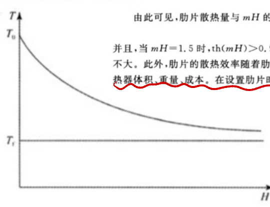


图 2-28

如图 2-28 所示，肋片温度随肋片高度成指数下降。

根据肋片散热量的分析解，可知肋片散热量为：$\Phi=\frac{hP}{m}\theta_0\cdot th(mH)\uparrow$ 增加有限

【2-47】（南京航空航天大学 2000 年考研试题）计算一圆管壁的传热热流。已知管内流体温度为 90℃，$h_1=10^4W/(m^2\cdot K)$，直径 $d_1=50mm$；管外流体温度为 20℃，$h_2=100W/(m^2\cdot K)$，直径 $d_2=58mm$；导热系数 $\lambda=50W/(m\cdot K)$，管长为 1m。

圆筒导热

解：本问题可以通过热阻分析法加以求解。

$\Phi=\frac{\Delta t}{R}=\frac{\Delta t}{R_{h_1}+R+R_{h_2}}$

$R_{h_1}=\frac{1}{Ah_1}=\frac{1}{\pi d_1 h_1}$，$R_{h_2}=\frac{1}{Ah_2}=\frac{1}{\pi d_2 h_2}$，$R=\frac{1}{\lambda}\int\frac{dr}{A}=\frac{\ln(\frac{d_2}{d_1})}{2\pi\lambda l}$

圆管内侧换热热阻：

$$\frac{1}{\pi d_1 h_1}=\frac{1}{\pi\times0.05\times10^4}=6.37\times10^{-4}K/W$$

圆管管壁导热热阻：

$$\frac{\ln(d_2/d_1)}{2\pi\lambda l}=\frac{\ln(58/50)}{2\pi\times50\times1}=4.72\times10^{-4}K/W$$

圆管外侧换热热阻：

$$\frac{1}{\pi d_2 h_2}=\frac{1}{\pi\times0.058\times100}=5.49\times10^{-2}K/W$$

根据传热方程式，可得圆管壁的传热热流为：

$$\Phi=\frac{t_1-t_2}{R_总}=\frac{90-20}{6.37\times10^{-4}+4.72\times10^{-4}+5.49\times10^{-2}}=1250W$$

【2-49】（重庆大学 2005 年考研试题）名词解释：肋片效率 η_f 和肋面总效率 η_0。

解：肋片效率表征单个肋片散热的有效程度，它的物理意义是实际散热量与假设整个肋片表面处于肋基温度下的散热量之比。

肋面总效率是表征整个肋壁散热的有效程度，它的物理意义是整个肋壁的实际散热量与假设整个肋壁均处于肋基温度下的散热量之比。

【2-50】（重庆大学 2008 年考研试题）能量微分方程 $\frac{dt}{d\tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$ 与固体导热微分方程 $\frac{\partial t}{\partial\tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$ 物理意义上有何区别？什么情况下能量微分方程可以转化为固体导热微分方程？

$\rightarrow\frac{\partial t}{\partial\tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}$

答：固体导热微分方程是在导热体中取微元体，按照能量守恒定律，在任一时间间隔内有以下热平衡关系：导入微元体的总热量＋微元体内热源的生成热＝导出微元体的总热量＋微元体热力学能的增量。对于导热系数为常数、无内热源的二维问题，可以得到固体导热微分方程：$\frac{\partial t}{\partial\tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$。由此可知，固体导热问题研究的对象是固体或静止流体。

能量微分方程是在固体导热微分方程的基础上，考虑宏观流动造成的影响，通过集中参数法分析，可得到如下能量微分方程：

$$\frac{dt}{d\tau}=\boxed{\frac{\partial t}{\partial\tau}+u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)}$$

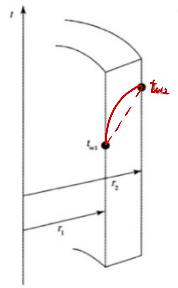
对比上面两条方程可知，当 $u=0$、$v=0$ 时，即对于静止流体问题，两条方程可以相互转化。

【2-51】（重庆大学 2007 年考研试题）如图 2-29 所示，通过圆筒壁的一维稳态导热，设壁体导热系数为常数，壁温 $t_{w1}<t_{w2}$，圆筒壁内半径之比 $r_1/r_2=0.9$。试求：

（1）绘出壁内的温度分布曲线。

（2）内外壁表面温度梯度的比值。

$\Phi=-\lambda A\frac{dt}{dr}$ A↓ $|\frac{dt}{dr}|$↑



$\Phi=-\lambda A\frac{dt}{dr}=-\lambda\cdot 2\pi r\frac{dt}{dr}$

$\left|\frac{(dt/dr)_{r=r_2}}{(dt/dr)_{r=r_1}}\right|=\frac{r_1}{r_2}=0.9$

【2-54】（重庆大学 2005 年考研试题）空间直角坐标系中的导热微分方程：

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)+\dot{\phi}$$

根据下列各条件分别简化该方程式。

（1）导热体内物性参数为常数，无内热源。→ $\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$

（2）二维稳态温度场，无内热源。→ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)=0$

（3）导热体内物性参数为常数，一维稳态温度场。

↳ $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\dot\Phi}{\lambda}=0$

【2-53】（重庆大学 2006 年考研试题）如图 2-31 所示坐标，一厚度为 δ、导热系数 λ 为常数的大平壁，壁内具有均匀内热源 $\dot{\phi}$，壁两侧分别维持恒定温度 t_{w1} 和 t_{w2}。试求：

（1）建立这一导热问题完整的数学描写（即写出微分方程式和求解所需定解条件）。

（2）推导出温度分布表达式。

（3）若 $\delta=0.48$，$\lambda=0.96\text{W}/(\text{m}\cdot℃)$，$\dot{\phi}=200\text{W/m}^3$，$t_{w1}=36℃$，$t_{w2}=24℃$，求壁内最高温度点位置及最高温度，并在图上绘出温度分布线。

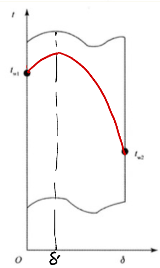


图 2-31

$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\dot\Phi}{\lambda}=0$ $\begin{cases}x=0, & t=t_{w1}\\ x=\delta, & t=t_{w2}\end{cases}$

↳ $t=-\frac{\dot\Phi}{2\lambda}x^2+C_1x+C_2$

可得：$c_2=t_{w1}$，$c_1=\dfrac{t_{w2}-t_{w1}+\frac{\dot{\phi}}{2\lambda}\delta^2}{\delta}$。

所以温度分布表达式为：

$$t=-\frac{\dot{\phi}}{2\lambda}x^2+\left[\frac{t_{w2}-t_{w1}+\frac{\dot{\phi}}{2\lambda}\delta^2}{\delta}\right]x+t_{w1}$$

（3）把 $\delta=0.48\text{m}$、$\lambda=0.96\text{W}/(\text{m}^2\cdot℃)$、$\dot{\phi}=200\text{W/m}^3$、$t_{w1}=36℃$、$t_{w2}=24℃$ 代入温度分布表达式，可知当 x 取下值时：

$$x=x_{\max}=\frac{\lambda}{\dot{\phi}}\frac{t_{w2}-t_{w1}+\frac{\dot{\phi}}{2\lambda}\delta^2}{\delta}=\frac{0.96}{200}\times\frac{24-36+\frac{200}{2\times0.96}\times0.48^2}{0.48}=0.12(\text{m})$$

则有：

$$t_{\max}=-\frac{\dot{\phi}}{2\lambda}x_{\max}{}^2+\left[\frac{t_{w2}-t_{w1}+\frac{\dot{\phi}}{2\lambda}\delta^2}{\delta}\right]x_{\max}+t_{w1}$$

$$=-\frac{200}{2\times0.96}\times0.12^2+\frac{24-36+\frac{200}{2\times0.96}\times0.48^2}{0.48}\times0.12+36$$

$$=37.5(℃)。$$

所以壁内最高温度点位置为 $x=0.12\text{m}$，最高温度为 $t_{\max}=37.5℃$。

【2-64】（清华大学 2006—2007 学年第 1 学期期末考试试题）在同样的加热或冷却条件下，（ A ）。

A. 物体内部各处温度差别愈小，则其导温系数 a 值愈大

B. 物体内部各处温度差别愈大，则其导温系数 a 值愈大

C. 热系数 λ 值及热容量 ρc 愈大，则 a 愈大。

【2-66】（清华大学 2006—2007 学年第 1 学期期末考试试题）何谓肋片效率？采用加装肋片来强化传热，对肋片的选材、肋片的形状和肋片效率有何要求？

$\eta_f=\frac{th(mH)}{mH}\propto\lambda.\delta.\frac{1}{Hm}.\lambda$

解：肋片效率为肋片的实际散热量与假设整个肋片温度都与肋根温度相同时的理想散热量之比。肋片效率的主要影响因素有：

$mH=\sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}H=\sqrt{\frac{2h}{\lambda\delta}}H$

（1）肋片材料的热导率：热导率愈大，肋片效率愈高。

（2）肋片高度：肋片愈高，肋片效率愈低。

（3）肋片厚度：肋片愈厚，肋片效率愈高。

（4）表面传热系数：表面传热系数愈大，肋片效率愈低。

【2-80】（中国石油大学<华东>2005—2006 学年第 2 学期期末考试试题）两块厚度相同的无限大平壁，分别由金属铜和木头制成。若保持其两侧表面温度对应相等，那么，在常物性、稳态导热的情况下两平壁内的温度分布是否相同？为什么？

解：相同。因为对于常物性、无内热源的无限大平壁的稳态导热，第一类边界条件下其温度分布仅取决于边界温度，而与材料的导热系数无关。

【2-56】（西北工业大学 2001 年考研试题）在稳态、常物性、无内热源的导热中，物体内部某一点的温度是否会低于其表面上任意一点的温度？为什么？

解：不可能。假设物体内部某一点的温度低于其表面上任意一点的温度，那么分析该点的传热过程，只存在从外界吸热，这显然不满足能量守恒定律。所以，在稳态、常物性、无内热源的导热中，物体内部某一点的温度不可能低于其表面上任意一点的温度。

【2-57】（西北工业大学 2001 年考研试题）设计肋片时，是否肋片越长越好？ $\eta_f\downarrow$

解：不是。因为设计的肋片越长固然能通过增加表面积来强化传热，但是同时增加了固体导热热阻，降低了肋效率。所以，设计肋片并不是肋片越长越好。

【2-58】（中国科学院 2009 年考研试题）写出热导率和热扩散系数的定义式，并给出两者的物理意义和单位。

λ $a=\lambda/\rho c$

解：导热系数的定义式由傅里叶定律的数学表达式给出：$\lambda=\dfrac{|q|}{\left|\dfrac{\partial t}{\partial x}n\right|}$。它等于在单位温度梯度作用下物体内热流密度矢量的模，单位为 W/(m·K)。

热扩散率的定义式为：$a=\lambda/(\rho c)$。它的物理意义是材料传播温度变化能力大小的指标，单位为 m^2/s。

【2-59】（中国科学院 2009 年考研试题）何为肋片有效度？热水流过一根管子将热能传至流过管子外表面的空气，为增强换热，应将肋片装在管子的内表面还是外表面？请给出理由。

解：肋片有效度是指肋片散热量与没有肋片时肋基处的散热量之比，其表达式为：

ε_f

$$\varepsilon=\frac{q}{hA\theta}$$

空气静止 h↓ 减小占比大的热阻

由于管外侧的对流传热系数较小，由上式可知，从强化传热角度考虑，应在管外侧表面上添加肋片。

【2-60】（中国科学院 2008 年考研试题）给出一维传热中常见的三种边界条件，并画出边界处温度分布的示意图。

解：

（1）规定了边界上的温度值。如图 2-33 温度分布的示意图所示，规定边界温度保持常数，即 $t_w=$常量。

（2）规定了边界上的热流密度值。如图 2-34 的温度分布示意图所示，规定边界上的热流密度保持定值，即：$q_w=-\lambda\left.\dfrac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0}=$常数。

（3）规定了边界上物体与周围流体间的表面传热系数 h 及周围流体的温度 t_f。如图 2-35 的温度示意图所示，第三类边界条件可表示为：$-\lambda\left.\dfrac{\partial t}{\partial n}\right|_{x=0}=h(t_w-t_f)$。

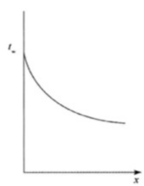


图 2-33

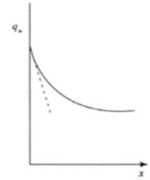


图 2-34

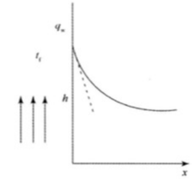


图 2-35

【2-61】（中国科学技术大学 2000 年考研试题）已知一根一维均质棒，在稳态、无内热源条件下，实验发现 $\frac{d^2t}{dx^2}<0$（式中 t 为温度，x 为空间坐标），试判断棒材的导热系数 $\lambda(t)$ 随 t 增大呢，还是减小？

$-\frac{d\lambda}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\lambda(t)\frac{d^2t}{dx^2}=0$

↑λ

解：根据傅里叶定律可知：$q=-\lambda(t)\frac{dt}{dx}$。等式两边对 x 求导，得：

$$0=\frac{d\lambda}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\lambda\frac{d^2t}{dx^2}$$

因为 $\lambda>0$，$\frac{d^2t}{dx^2}<0$，所以 $\frac{d\lambda}{dt}>0$。

由此可以判断，棒材的导热系数 $\lambda(t)$ 随 t 增大。

4. 解的应用

在将上述分析解应用于计算肋片效率之前，先来分析温度计套管的测温误差，读者应注意这里是如何将表面上看来与肋片风马牛不相及的温度计套管与肋片导热问题联系起来的。

套管温度计与增加肋片是相反过程，减少热量损失

例题 2-7 **温度计套管测温误差的分析**

肋片模型

压气机设备的储气筒里的空气温度用一支插入装油的铁套管中的玻璃水银温度计来测量，如图 2-22 所示。已知温度计的读数为 100 ℃，储气筒与温度计套管连接处的温度 $t_0 = 50$ ℃，套管高 $H = 140$ mm、壁厚 $\delta = 1$ mm、管材导热系数 $\lambda = 58.2$ W/(m·K)，套管外表面的表面传热系数 $h = 29.1$ W/(m^2·K)。试分析：(1) 温度计的读数能否准确地代表被测地点处的空气温度；(2) 如果不能，分析其误差有多大。

不能

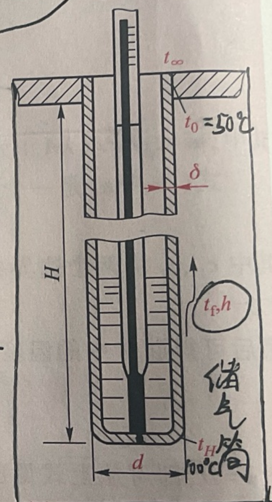


图 2-22 温度计套管

题解

分析：由于温度计的感温泡与套管顶部直接接触，可以认为温度计的读数就是套管顶端的壁面温度 t_H。温度计套管与其四周环境之间发生着三种方式的热量传递，即从①套管顶端向根部的导热、②从压缩空气向套管外表面的对流传热、③从套管外表面向储气筒筒身的辐射传热。稳态时，套管从压缩空气获得的热流量正好等于套筒向筒身的导热及辐射传热之和。因而，套管的壁面温度必然低于压缩空气的温度，即存在着测温误差。

$\Phi_{对流} = \Phi_{导热} + \Phi_{辐射}$

$\pi(\delta + d\delta) - \pi\delta = \pi d\delta$

套管中每一截面上的温度可认为是相等的，因而温度计套管可以看成截面积为 $\pi d\delta$ 的一等截面直肋（d 为套管直径）。而所谓测温误差，就是套管顶端的过余温度 $\theta_H = t_H - t_f$，此处 t_f 是筒内空气的温度①。

假设：通过上述分析，可以将所研究的问题看成一维稳态等截面直肋的导热问题，采用肋片分析中的各项假定。

$\theta_H = \frac{\theta_0}{ch(mH)} \rightarrow t_H - t_f = \frac{t_0 - t_f}{ch(mH)}$

计算：据式(2-50)有

$$\boxed{t_H - t_f = \frac{t_0 - t_f}{\mathrm{ch}(mH)}}$$

$m^2 = \frac{hP}{\lambda A_c}$ $\begin{cases} P = \pi d \\ A_c = \pi d\delta \end{cases}$

$mH = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}H = \sqrt{\frac{h}{\lambda\delta}}H = 3.13 \rightarrow t_f = 104.7$°C

误差：$t_f - t_H = 4.7$°C　减少 $t_H - t_f$ 要 $ch(mH)\uparrow$　$mH\uparrow$　减少 $\theta_0 = t_0 - t_f$

$\sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}H = \sqrt{\frac{h}{\lambda\delta}}H$

2.4.4 肋片的选用与最小重量肋片

增加/减小传热阻力　$\frac{\delta/\lambda}{1/h} = \frac{\delta h}{\lambda} = Bi$

λ↓ mH↑ 导热系数↓
H↑ 管高增大，δ↓ 厚度↓ mH↑
h↑ 对流换热↑ mH↑

为了增加传热量，由式(1-6)、式(1-11)知可以采用增加传热面积的方法。在基础表面上增加肋片是在一定的材料消耗下极大限度地增加传热面积的有效方法。另外，采用肋片后增加了通过固体的导热热阻，此时式(1-11)中的总传热系数可能会受到影响。所以是否采用在基础表面上增加肋片取决于加肋片后总的传热阻力是增加还是减小。增加肋片加大了对流传热面积，有利于减小总面积热阻，但是肋片增加了固体导热阻力。因此，增加肋片是否有利取决于肋片的导热阻力（用 $\frac{\delta}{\lambda}$ 表示）与表面对流传热阻力（用 $\frac{1}{h}$ 表示）之比。

$\frac{\delta}{\lambda}$ 与 $\frac{1}{h}$

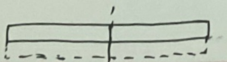
$Bi \le \frac{1}{4}$ 加肋

这一比值 $\frac{h\delta}{\lambda}$ 构成一个量纲为一的数，称为毕渥数①，记为 Bi。对等截面的直肋，当 $Bi \le 0.25$ 时（δ 为肋片的半厚），加肋总是有利的[22]。一般工程应用中，肋片总是用导热系数高的金属做成，当换热介质为空气时，采用肋片对强化传热总是有效的。例如空调器的蒸发器、冷凝器中的整体式翅片，航空发动机叶片尾部的针肋——短的圆柱形或方形的直肋（参见第 1 章习题 1-36）。

对于航天器而言，肋片是

例题 2-9 平板式太阳能集热器的平板温度场分析

图2-31示出了平板式太阳能集热器的一种简单的吸热板结构。吸热板面向太阳的一面涂有一层对太阳辐射吸收比很高的材料，吸热板的背面设置了一组平行的管子，其内通以冷却水以吸收太阳辐射，管子之间则充满绝热材料。吸热板的正面在接受太阳辐射的同时受到环境的冷却，设净吸收的太阳辐射为 q_r，表面传热系数为 h，空气温度为 t_∞，管子与吸热板结合处的温度为 t_0，试写出确定吸热板中温度分布的数学描写并求解之。



绝热/保温材料 ⟶ 对称面

题解

假设：首先对这一问题做以下简化假设：(1) 在垂直于纸面方向上管板的长度远大于其厚度，因而可以取一个截面来研究；(2) 任意两根相邻冷却水管间的温度分布可以认为是一样的；(3) 吸热板背面绝热良好，因而背面相当于对称面；(4) 相邻两冷却水管间吸热板的温度分布关于中间截面对称，因而中间截面也是一个绝热面；(5) $\delta/\lambda \ll 1/h$，因而任一 x 截面处沿厚度方向的温度变化可以不计。

分析：经过上述假设，太阳能集热器吸热板中的温度分布问题就成为如图2-32所示的等截面直肋中的导热问题，采用分析肋片导热时的前三个假设。

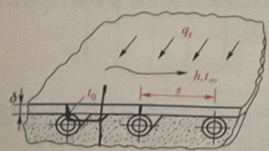


图 2-31 平板式太阳能集热器吸热板

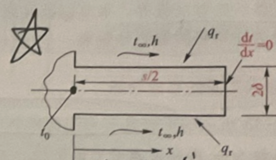


图 2-32 吸热板导热的简化模型

能量守恒式　　等截面直肋

求源项

$(\Phi_x - \Phi_{x+dx}) + \Phi_{sun} = \Phi_{对流}$

① $\lambda \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dt}{dx}\right)dx + q_r P dx = hP(t-t_\infty)dx$

推导：肋片的导热微分方程与边界条件为

$$\boxed{\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{\dot\Phi}{\lambda}=0} \quad (i)$$

$$\boxed{x=0, t=t_0;\ x=\frac{s}{2}, \frac{dt}{dx}=0} \quad (j)$$

$\Phi_s = hPdx(t-t_\infty) - q_rPdx$

$\dot\Phi = \frac{-\Phi_s}{A_c dx}$

对流折算 $\frac{q_rPdx - hP(t-t_\infty)dx}{A_c dx}$

$\dot\Phi = \frac{q_rP - hP(t-t_\infty)}{A_c}$

现在进一步导出式(i)中源项 $\dot\Phi$ 的表达式。仿照前面的分析，可以写出

$$\boxed{\dot\Phi = \frac{-hP(t-t_\infty)+q_rP}{A_c}}$$

$$= -\frac{hP}{A_c}\left(t-t_\infty-\frac{q_r}{h}\right) \quad (k)$$

代入式(i)得

$$\boxed{\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{hP}{\lambda A_c}\left(t-t_\infty-\frac{q_r}{h}\right)} \quad (l)$$

$m^2 = \frac{hP}{\lambda A_c}$

$\theta = t-t_\infty-\frac{q_r}{h}$ → $\boxed{\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0}$

为使式(l)成为齐次方程，定义 $\theta=t-t_\infty-\frac{q_r}{h}$。于是得

$$\frac{d^2t}{dx^2}=m^2\theta$$

∴ $\theta = C_1e^{mx}+C_2e^{-mx}$ (m)

$$x=0,\theta=\theta_0;\ x=\frac{s}{2},\frac{d\theta}{dx}=0$$

$x=0 \to \theta=\theta_0=t_0-t_\infty$

$x=\frac{s}{2} \to d\theta/dx=0$

(2-49)显然就是这一问题的解，而只要将其中的 H 用 $s/2$ 来代替即可，此处不再列出。

讨论：与本节前面分析的等截面直肋的不同在于增加了表面的辐射吸热量，但引入过余温度使方程齐次化后，得到完全相同的数学描写，可见过余温度概念的重要性。另外，由于对称性，本例中肋片顶端绝热是严格的条件，而不是近似的假设。

$\theta = t - t_\infty$

$\theta = \theta_0 \frac{ch(m(x-H))}{ch(mH)}$　　$H=s/2$ 肋高

$= \theta_0 \frac{ch(m(x-\frac{s}{2}))}{ch(m\frac{s}{2})}$

第三章

(一)非稳态导热的特点及类型

物体的温度随时间而变化的导热过程称非稳态导热。

在热量传递方向上不同位置的导热量不同

2. 特点

非稳态导热过程中，在与热流量方向相垂直的不同截面上热流量不相等，这是非稳态导热区别于稳态导热的一个特点。由于在热量传递的路径上，物体各处温度的变化要积聚或消耗能量，所以，在热流量传递的方向上热流量 Φ 不恒定。

如图 3-1 所示，设一平壁，初值温度 t_0，令其左侧的表面温度突然升高到 t_1 并保持不变，而右侧仍与温度为 t_0 的空气接触，分析物体的温度场的变化过程。

首先，物体与高温表面靠近部分的温度很快上升，而其余部分仍保持原来的 t_0。

如图中曲线 HBD，随时间的推移，由于物体导热温度变化波及范围扩大，到某一时间后，右侧表面温度也逐渐升高，如图中曲线 HCD、HE、HF。最后，当时间达到一定值后，温度分布保持恒定，如图中曲线 HG(若 λ 等于常数，则 HG 是直线)。

由此可见，上述非稳态导热过程中，存在着右侧面参与换热与不参与换热的两个不同阶段，即非正规状况阶段和正规状况阶段。

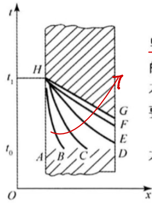


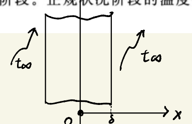
图 3-1

(1)非正规状况阶段。温度分布显现出部分为非稳态导热规律控制区和部分为初始温度区的混合分布，即：在此阶段物体温度分布受初始温度分布的影响较大，此阶段称非正规状况阶段。

(2)正规状况阶段。当右侧面参与换热以后，物体中的温度分布不受 t_0 影响，主要取决于边界条件，此时，非稳态导热过程进入到正规状况阶段。正规状况阶段的温度变化规律是本章讨论的重点。

初始温度

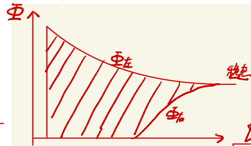
第三类边界条件：$\boxed{h(t_w - t_f) = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w}$ (右壁)



2. 热扩散率 a

a 的定义式为 $a=\dfrac{\lambda}{\rho c}$，其单位为 m^2/s；它是物性参数，表征物体传递温度变化的能力，亦称导温系数。热扩散率取决于 λ 和 ρc 的综合影响，所以尽管在 20 ℃时，水的导热系数约为空气的 23 倍，但 $(\rho c)_{空气}=1\ 211\ J/(kg\cdot K)$，远小于水的 (ρc)(约为 $4.2\times10^6\ J/(kg\cdot K)$)。因此，在不考虑对流时，在非稳态导热状态下，同样厚度的水层和空气层要达到相同的温度场，空气层要比水层约快 160 倍。

一般情况下，稳态导热的温度分布取决于物体的导热系数 λ，但非稳态导热的温度分布则不仅取决于导热系数 λ，还取决于热扩散率 a。



毕渥数定义式：$Bi=\dfrac{\delta/\lambda}{1/h}=\dfrac{\delta h}{\lambda}$。 固体内部单位面积导热热阻与换热热阻之比

毕渥数属特征数(准则数)，出现在特征数定义式中的几何长度称为特征长度，一般用符号 l 表示，此处以平板的半厚作为特征长度，即取 $l=\delta$。物理意义：Bi 的大小反映了物体在非稳态条件下内部温度场的分布规律。

毕渥数 $Bi=\dfrac{h\delta}{\lambda}$

图 3-1 示出了三种情形下的非稳态导热问题。图中无限大平板与温度为 t_∞ 的流体处于第三类边界条件下。图 3-1(a)表示物体内部导热热阻 $\dfrac{\delta}{\lambda}$ 远小于外部的对流热阻 $\dfrac{1}{h}$，即 $Bi=\dfrac{h\delta}{\lambda}\to0$。此时在任一时刻物体内部的温度分布都是均匀的，即温度分布与几何位置无关，仅为时间的函数，即 $t=f(\tau)$。这就是第 3.1.2 节要介绍的集总参数法。

$\frac{\delta}{\lambda}\ll\frac{1}{h}$ $Bi\to0$

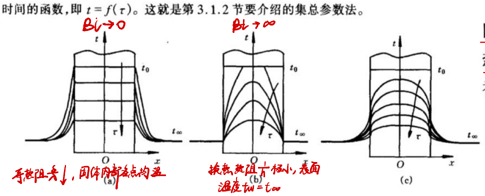


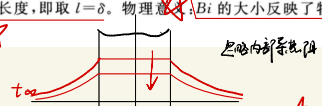
图 3-1 一维非稳态导热的三种情形

(a) $\dfrac{\delta}{\lambda}\ll\dfrac{1}{h}(Bi\to0)$； (b) $\dfrac{\delta}{\lambda}\gg\dfrac{1}{h}(Bi\to\infty)$； (c) $\dfrac{\delta}{\lambda}\sim\dfrac{1}{h}(Bi\sim O(1))$

当 $Bi\to\infty$ 时(图 3-1(b))，平板外部对流热阻远小于内部导热热阻，此时相当于第一类边界条件，即壁面温度等于流体温度。图 3-1(c)介于图 3-1(a)和 3-1(b)之间，是本章第 3.1.3节要介绍的内容。实际上，图 3-1(b)可以看成图 3-1(c)的特例。

读者应注意 $Bi=\dfrac{h\delta}{\lambda}$ 的物理意义，它表示物体内部导热热阻 $\dfrac{\delta}{\lambda}$ 与外部对流热阻 $\dfrac{1}{h}$ 的比值。

零维问题——集中参数法
与坐标无关，集中于原点



$Bi\to0$

当固体内的 $\delta/\lambda\ll1/h$ 时，固体内的温度趋于一致，此时可认为整个固体在同一瞬间均处于同一温度下，这时需求解的温度仅是时间的一元函数，而与坐标无关。这种忽略物体内部导热热阻的简化分析方法称为集中参数法。如果物体的导热系数相当大，或者几何尺寸相当小，或者表面传热系数极低，则其非稳态导热都可能属于这一类型的问题。

$$\frac{\partial t}{\partial\tau}=a\nabla^2t+\frac{\dot\Phi}{\rho c}\xrightarrow{\text{忽略坐标}}\boxed{\frac{\partial t}{\partial\tau}=\frac{\dot\Phi}{\rho c}}$$

$\boxed{广义热源\quad \dot\Phi\cdot V=Ah(t_\infty-t)>0\quad 放热源}$

$$\longrightarrow\rho cV\frac{\partial t}{\partial\tau}=hA(t_\infty-t)\xrightarrow{\text{过余温度}\theta=t-t_\infty}\rho cV\frac{d\theta}{d\tau}=-hA\theta$$

$$\theta(0)=t_0-t_\infty=\theta_0$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta}=-\int_0^\tau\frac{hA}{\rho cV}d\tau\longrightarrow\ln\frac{\theta}{\theta_0}=-\frac{hA}{\rho cV}\tau\longrightarrow\boxed{\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)}$$

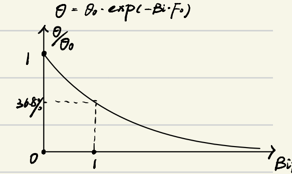
$\boxed{特征长度\ l_c=V/A}$

$$\frac{hA}{\rho cV}\tau=\left(\frac{hl_c}{\lambda}\right)\cdot\frac{\lambda}{\rho c}\cdot\frac{\tau}{l_c^2}=Bi\cdot\left(\frac{a\tau}{l_c^2}\right)=Bi\cdot F_o\longrightarrow\boxed{\frac{\theta}{\theta_0}=\exp(-Bi\cdot F_o)}$$

傅里叶数

$$\theta=\theta_0\cdot\exp(-Bi\cdot F_o)$$

$\boxed{时间常数\ \tau_c=\frac{\rho cV}{hA}}\rightarrow\theta/\theta_0=e^{-1}=36.8\%$



当τ时刻：

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi&=hA(t-t_\infty)=(t_0-t_\infty)hA\frac{t_\infty-t}{t_\infty-t_0}\\&=(t_0-t_\infty)hA\exp(-Bi\cdot F_o)\end{aligned}}$$

$$Q=\int_0^\tau\Phi d\tau=(t_\infty-t)\cancel{hA}\frac{\rho cV}{\cancel{hA}}[1-\exp(-Bi\cdot F_o)]$$

$$=\boxed{(t_0-t_\infty)\rho cV[1-\exp(-Bi\cdot F_o)]}$$

② 瞬时热流量 Φ 及非稳态过程传递的总热量 Q_τ

瞬时热流量

$$\Phi=-\rho cV\frac{dt}{d\tau}=\theta_0hA\exp\left(-\frac{hA}{\rho cV}\tau\right)$$

从 $\tau=0\sim\tau$ 时刻内物体与流体间所交换的总热量为 Q_τ。教材中按 $Q_\tau=\int_0^\tau\Phi d\tau$ 的方式得到了教材式(3-9)，其实 Q_τ 还可按如下方式计算：

$$\boxed{Q_\tau=\rho cV(t_0-t)}=\rho cV[t_0-t_\infty-(t-t_\infty)]$$
$$=\rho cV(\theta_0-\theta)=\theta_0\rho cV\left(1-\frac{\theta}{\theta_0}\right)\qquad(3-5)$$

此式与教材式(3-9)完全一样。

从上述求解结果可以看出：物体内的温度分布确实只与时间 τ 有关，而与空间坐标无关。并且，温度分布既与导热系数 λ 有关，又与热扩散率 a 有关。实际应用集总参数法时，还应注意此法既适用于物体被加热的情形，又适于物体被冷却的情形。

3. 毕渥数与傅里叶数的物理意义

Bi Fo

(1)毕渥数 Bi。表征固体内部单位导热面积上的导热热阻与单位面积上的换热热阻(即外部热阻)之比，即：

$$Bi=\frac{l/\lambda}{1/h}$$

Bi↓

Bi 越小，表示内热阻越小，外部热阻越大。此时采用集中参数法求解更为合适。物理意义：Bi 的大小反映了物体在非稳态导热条件下，物体内温度场的分布规律。

(2)傅里叶数 Fo。傅里叶数 Fo 是表征非稳态过程进行深度的无量纲时间，其计算式为：

$$Fo=\frac{\tau}{l_c^2/a}=\frac{a\tau}{l_c^2}$$

进行深度

分子 τ 是从边界上开始发生热扰动的时刻起到所计算时刻为止的时间间隔。分母可视为边界上发生的有限大小的热扰动穿过一定厚度的固体层扩散到 l_c^2 的面积上所需的时间。物理意义：表示非稳态导热过程进行的程度，Fo 越大，热扰动就越深入地传播到物体内部，因而物体内各点的温度越接近周围介质的温度。

(三)集中参数法的适用范围

δ、R、R ≤0.1

对于平板、圆柱和球中的一维非稳态第三类边界条件下的导热问题，当按特征长度：$l=\delta$，厚度为 2δ 的平板；$l=R$，圆柱；$l=R$，球。→ $\boxed{Bi\le0.1}$

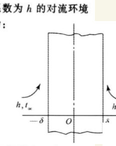
定义的 Bi 数满足 $Bi=\dfrac{hl}{\lambda}\le0.1$ 时，适用集中参数法。式中的特征长度 l 按 $\dfrac{V}{A}$ 计算时，对于圆柱与球分别是半径的 1/2 和 1/3，集中参数法的适用范围也可放宽至 $Bi_V\le0.1$。

$Bi=\dfrac{h(V/A)}{\lambda}\le0.1/0.05/0.033$ 平板/长圆柱/球

一维非稳态分析解

以无限大平板为例，讨论厚为 2δ 的平板，处于温度为 t_∞、表面传热系数为 h 的对流环境中，初始时刻温度为 t_0。则描述其温度分布的导热微分方程及定解条件为：

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2t}{\partial x^2}}\quad(0<x<\delta,\ \tau>0)$$
$$t\big|_{\tau=0}=t_0\quad(0\le x\le\delta)$$
$$\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$$
$$h(t-t_\infty)\big|_{x=\delta}=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=\delta}$$



可以看出，$t=f(a,\tau,\lambda,\delta,h,x)$，即温度取决于上述 6 个变量。若引入如下无量纲温度 Θ、无量纲坐标 X 和无量纲时间 Fo：

$$\boxed{\Theta=\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}},\quad X=\frac{x}{\delta},\quad Fo=\frac{a\tau}{\delta^2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Theta}{\partial F_o}=\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}\\ \Theta\big|_{Fo=0}=1\\ \dfrac{\partial\Theta}{\partial X}\Big|_{X=0}=0\\ -Bi\Theta\big|_{X=1}=\dfrac{\partial\Theta}{\partial X}\Big|_{X=1}\end{cases}$$

由式(3-8)，当引入上述无量纲量后，无量纲温度只取决于下述 3 个无量纲量：

$$\boxed{\Theta=f(Bi,Fo,X)}$$

即引入上述参数后，变量个数大大减少。 即 $\dfrac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=f\left(Bi,Fo,\dfrac{x}{\delta}\right)$

(三)非稳态导热正规状况阶段的工程计算方法

$\boxed{当\ Fo>0.2\ 时}$，可采用上述计算公式求得非稳态导热物体的温度场及交换的热量，也可采用近似拟合公式法和图线法求得。

(1)诺模图：工程技术中，为便于计算，采用按分析解的级数第一项绘制的一些图线，叫诺模图。

按分析解的级数第一项绘制

(2)海斯勒图：诺模图中用以确定温度分布的图线，称海斯勒图。

首先给出 θ_m/θ_0 随 Fo 及 Bi 变化的曲线(此时 $x/\delta=0$)，然后确定 θ/θ_m 的值，于是平板中任意一点的 θ/θ_0 值便为：

θ_m：平板中心的过余温度

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{\theta_m}{\theta_0}\frac{\theta}{\theta_m}}$$

同样，从初始时刻到时刻 τ 物体与环境间所交换的热量，可作出 $\dfrac{Q}{Q_0}=f(Fo,Bi)$ 的曲线。

图线法计算非稳态导热正规状况的优点是简洁方便，缺点是准确度有限，误差较大。

2. 讨论 Bi 与 Fo 对温度场的影响

$\tau\uparrow$ $Fo\uparrow$ $\frac{\theta}{\theta_0}=\exp(-Bi\cdot Fo)\downarrow$ $\therefore \theta\downarrow$

(1)傅里叶数 Fo：物体中各点的过余温度随时间 τ 的增加而减小，而 Fo 与 τ 成正比，所以物体中各点过余温度亦随 Fo 的增大而减小。

热扰动深入

(2)毕渥数 Bi 对温度的影响从以下两方面分析：

$Bi\uparrow = \frac{h\delta}{\lambda}$ $h\uparrow$ 表面换热强

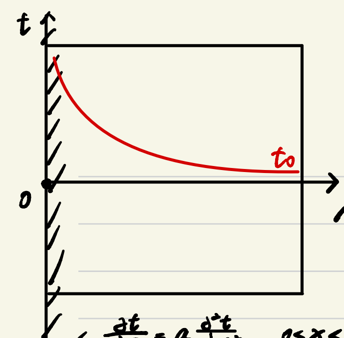
一方面，Fo 相同时，Bi 越大，$\frac{\theta_m}{\theta_0}$ 越小。因为，Bi 越大，意味着固体表面的换热条件越强，导致物体的中心温度越迅速地接近周围介质的温度。在极限情况下，$Bi\to\infty$ 时，意味着在过程开始瞬间物体表面温度就达到介质温度，物体中心温度变化也最迅速，所以在诺模图中 $1/Bi=0$ 时的线就是壁面温度保持恒定的第一类边界条件的解。

知：当 $\frac{1}{Bi}>10$（即 $Bi<0.1$）时，截面上的过余温度差小于 5%，当 Bi 下限一直推到 0.01 时，其分析解与集中参数法的解相差极微。

$Bi<0.1$

由此可见：介质温度恒定的第三类边界条件下的分析解，当 $Bi\to\infty$ 时，转化为第一类边界条件下的解，$Bi\to 0$ 时，则与集中参数法的解相同。

半无限大物体非稳态导热



(一)半无限大物体的非稳态导热分析解及讨论

半无限大物体几何上是指从 $x=0$ 的界面开始可以向正的 x 方向及向上、向下两个方向无限延伸的物体，称半无限大物体。实际中不存在该物体，但研究物体中非稳态导热的初始阶段，可把实物看作半无限大物体处理。

如：有限厚度的平板，起初有均匀温度，后其侧表面突然受到热扰动，如壁温突然升高到一定值并保持不变；壁面突然受到恒定的热流量密度加热；壁面受到温度恒定的流体的加热或冷却。当扰动的影响只局限在表面附近，而尚未进入平板内部时，就可视该平板为"半无限大"物体。

边界
- 第一类：温度恒定 t_w — $t(0,\tau)=t_w$
- 二：恒定热流 q_w — $q_0=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}$
- 三：与 t_∞ 流体加热 — $h[t_\infty-t(0,\tau)]=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}$

$$\begin{cases}\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} & 0<x<+\infty\\ \tau=0 & t(x,\tau)=t_0\\ x\to\infty & t\to t_0\\ x=0 & \text{边界条件}\end{cases}$$

教材中分别给出了三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解，以第一类边界条件下半无限大物体非稳态导热温度场的分析解为例加以分析。

半无限大物体初始温度均匀为 t_0，当 $\tau=0$ 时，$x=0$ 侧表面温度突然升高到 t_w，并保持不变，试确定物体内温度随时间的变化的分析解为：

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t-t_w}{t_0-t_w}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}}e^{-\eta^2}d\eta=\boxed{\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)=\mathrm{erf}\eta}$$

其中，无量纲变量 $\eta=\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$；erf$\eta$ 称为误差函数，它随 η 的变化而变化，当 $\eta=2$ 时，$\theta/\theta_0=0.9953$，就是说当 $\eta\geqslant 2$，即 $\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\geqslant 2$ 时，该处 x 的温度仍认为等于 t_0。

$x\geqslant 4\sqrt{a\tau}$ → t_0

由此得到以下两个重要参数：

$x^2\geqslant 16a\tau$

(1)从几何位置上说，若 $x\geqslant 4\sqrt{a\tau}$，则 τ 时 x 处的温度可认为未发生变化。所以，对初始温度均匀且厚为 2δ 的平板，当其一侧温度突然变化到另一恒定温度时，若 $\delta\geqslant 4\sqrt{a\tau}$，则在 τ 时刻之前该平板中瞬时温度场的计算可采用半无限大物体模型处理。

(2)从时间上看，如果 $\tau\leqslant\frac{x^2}{16a}$，则此时 x 处的温度可认为完全不变，所以把 $\frac{x^2}{16a}$ 视为惰性时间，即当 $\tau<\frac{x^2}{16a}$ 时 x 处的温度可认为仍等于 t_0，物体中的非稳态导热可以作为半无限大物体来处理。

五、非稳态导热问题求解思路

1. 解一维非稳态导热问题的基本思路

(1)首先，用毕渥数 Bi 检验是否满足集中参数法的条件，若性质属于 h 或 δ 未知，可先按集中参数法求解，然后校核是否满足集中参数法的条件。

(2)若不能用集总参数法，可采用分析解法（诺模图法或近似公式法）。

(3)若前两种方法方法均不能求解，则采用数值解法。

2. 多维非稳态导热问题的求解

二维或三维非稳态导热问题的求解在一定条件下可以转化为几个一维问题解析解的乘积。方法如下：

(1)先判断是否满足乘积解法的条件。

(2)合理将一个多维问题分解成几个一维问题，用乘积解法来解。

$x\geqslant 4\sqrt{a\tau}$

$\tau\leqslant\frac{x^2}{16a}$ → 惰性时间

吸热系数 $\sqrt{\rho c\lambda}$：向高温吸热

导温 $a=\frac{\lambda}{\rho c}$

则表面上的热流密度为：$q_w=\lambda\frac{t_w-t_0}{\sqrt{\pi a\tau}}$。

在时间 $[0,\tau]$ 内，半无限大物体表面与外界的换热量：

$$Q=A\int_0^\tau q_w d\tau=A\int_0^\tau\frac{\lambda(t_w-t_0)}{\sqrt{\pi a\tau}}d\tau=2A\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\sqrt{\rho c\lambda}(t_w-t_0)$$

由此可见，半无限大物体在第一类边界条件影响下被加热或冷却时，界面上的瞬时热流密度与时间的平方根成反比；而总的导热量与时间的平方根成正比。

在时间 $[0,\tau]$ 内交换的总热量则正比于 $\sqrt{\rho c\lambda}$，$\boxed{\sqrt{\rho c\lambda}\text{ 称为吸热系数}}$，表示物体向其接触的高温物体吸热的能力。

(二)导热量计算式

$\sqrt{\rho c\lambda}$ 吸热系数

以第一种边界条件为例，物体中任意一点的热流密度：

$$\boxed{q_x=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}}=-\lambda(t_0-t_w)\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{erf}\eta)=\lambda\frac{t_w-t_0}{\sqrt{\pi a\tau}}e^{-x^2/(4a\tau)}$$

【3-1】（华中科技大学 2006 年考研试题）什么是时间常数？试说明时间常数对动态温度测量精确度的影响。

$\tau_c=\frac{\rho cV}{hA}$　　$\frac{\theta}{\theta_0}=e^{(-\frac{hA}{\rho cV}\tau)}$

解：时间常数 $\tau_c=\frac{\rho cV}{hA}$，表示物体反映外界温度变化快慢的能力。时间常数越小，动态温度测量越精确。

$\tau\downarrow$ 灵敏

非正规状况

正规状况

【3-2】（华中科技大学 2006 年考研试题）将一初始温度为 T_0 的固体，突然置于壁面和空气温度均匀为 T_∞ 的大房间里，空气和固体间的对流表面传热系数为 h，固体体积为 V，表面积为 A，密度为 ρ，比热容为 c，可认为是黑体，若假设固体内部温度分布均匀（集中参数），考虑辐射、对流和非稳态导热，写出固体温度 T 随时间 τ 变化的微分方程。

$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$　　$\Phi_s=\sigma A(T^4-T_\infty^4)+hA(T-T_\infty)\longrightarrow \dot{\Phi}=\frac{-\Phi_s}{V}$

$\hookrightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{-[\sigma A(T_0^4-T_\infty^4)+hA(T_0-T_\infty)]}{\rho cV}$　　边界 $\tau=0,\ t=T_0$　　$\tau\to\infty,\ t\to T_\infty$

【3-3】（华中科技大学 2005 年考研试题）非周期性的加热或冷却过程可以分为哪两个阶段，它们各自有什么特征？

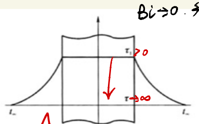
解：非周期性的加热或冷却过程可以分为非正视状况阶段和正规状况阶段。前者的温度分布依然受着初始温度分布的影响，也就是说热扰动还没有扩散到整个系统，系统中仍然存在着初始状态，此时的温度场必须用无穷级数加以描述；而后者却是热扰动已经扩散到了整个系统中，系统中各个地方的温度随时间变化，此时温度分布可以用初等函数加以描述（实际为无穷级数的第一项）。

边界条件

【3-4】（华中科技大学 2005 年考研试题）写出 Bi 数的定义式并解释其意义。在 $Bi\to 0$ 的情况，一初始温度为 t_0 的平面突然置于温度为 t_∞ 的流体中冷却，如图 3-4 所示。粗略画出 $\tau=\tau_1>0$ 和 $\tau=\infty$ 时平板附近的流体和平板的温度分布。

$Bi=\frac{hL}{\lambda}$　是物体单位面积导热热阻与换热热阻之比，体现物体在非稳态下的温度分布

$Bi\to 0$　集中参数法 $(Bi<0.1)$



【3-5】（华中科技大学 2005 年考研试题）有一直径为 3mm 的钢球，其密度为 7701kg/m³，比热容 460J/(kg·℃)，导热系数 23W/(m·℃)。今钢球在炉内加热至 $t_1=500$℃后，突然放置在 $t_\infty=20$℃的环境中冷却，测得钢球与环境间的换热系数为 78W/(m²·℃)，试计算钢球冷却到 100℃所需要的时间。　非稳态

$D=3\times10^{-3}\text{m}\rightarrow R=1.5\times10^{-3}\text{m}$

$\frac{V}{A}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2}=\frac{1}{3}R$

$\boxed{Bi=\frac{h\cdot R}{\lambda}=\frac{78}{23}\times1.5\times10^{-3}<0.1\rightarrow \text{集中参数法}}$

$\boxed{\frac{\theta}{\theta_0}=e^{-\frac{hA}{\rho cV}\tau}}\rightarrow \frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\frac{t-20}{500-20}=e^{-\frac{78}{7701\times460}\cdot\frac{3}{1.5\times10^{-3}}\tau}$　($t\to100$)

$\tau=\ln\frac{480}{80}\times\frac{1.5\times10^{-3}}{3}\times\frac{7701\times460}{78}=40.7\text{s}$

【3-6】（华中科技大学 2004 年考研试题）一金属圆柱体直径为 $d=100$mm，长度为 $l=50$mm，密度为 7800kg/m³，比热为 460J/(kg·℃)。柱体初始温度为 700℃。若 $\tau\geqslant0$s 时其下底面与温度为 100℃的油一直保持接触，对流表面传热系数为 $h_1=200$W/(m²·K)，其余表面绝热；$\tau\geqslant120$s 时，上表面再同时与温度为 20℃的空气保持接触，对流表面传热系数为 $h_2=40$W/(m²·K)，而侧面仍维持绝热。假定圆柱体的导热热阻很小，同一瞬间圆柱体温度均匀一致，求：

(1) $\tau=120$s 时圆柱体的温度。

(2) $\tau=600$s 时圆柱体的温度。

(3) 热平衡时圆柱体的温度。

直接能量守恒 $\longrightarrow \boxed{\rho cV\frac{\partial t}{\partial \tau}=hA(t_0-t)}$

(1) 或 $\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$　$\Phi_s=hA(t_0-t)$　$\dot{\Phi}=\frac{\Phi_s}{V}$

$\theta=t-t_0$　$\frac{\theta}{\theta_0}=exp(-\frac{hA}{\rho cV}\tau)$　$\tau=120$s 时 $\frac{\theta}{\theta_0}=0.875$

$\longrightarrow \boxed{t'=625℃}$

$V=\frac{\pi d^2}{4}\cdot l$　(2) $\boxed{\Phi_s=h_1A(t_0-t)+h_2A(t_1-t)}$

$A=\frac{\pi d^2}{4}$

$\dot{\Phi}=\frac{\Phi_s}{V}$　$\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{A}{\rho cV}[-h_1(t-t_0)-h_2(t-t_1)]\longrightarrow\frac{\partial t}{\partial \tau}=-\frac{1}{\rho cl}[(h_1+h_2)t-(h_1t_0+h_2t_1)]$

$\rightarrow\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{-(h_1+h_2)}{\rho cl}[t-\frac{h_1t_0+h_2t_1}{h_1+h_2}]}$　$\phi=t-\frac{h_1t_0+h_2t_1}{h_1+h_2}$　$\therefore\frac{\phi}{\phi_0}=e^{(-\frac{h_1+h_2}{\rho cl}\tau')}$

当 $\tau=600$时　$\tau'=600-120=480$s　过程时间　$\phi_0=t'-\frac{h_1t_0+h_2t_1}{h_1+h_2}$

$\phi=0.526\phi_0=284\rightarrow t=\phi+(\frac{h_1t_0+h_2t_1}{h_1+h_2})=369℃$

(3) 热平衡时 $\tau'\to\infty$　$\therefore\phi=0\rightarrow t=\frac{h_1t_0+h_2t_1}{h_1+h_2}=85℃$

或 $\Phi_s=0\rightarrow h_1(t_0-t)+h_2(t_1-t)=0$

【3-7】（北京科技大学 2008 年考研试题）有一体积为 V，表面积为 A_x 的物体。假设物体内部导热热阻很小，可以忽略，则物体在同一时刻各点的温度相同。物体与温度为 t_f 的环境发生对流换热，换热系数为 α，若物体导热率 λ、密度 ρ 和比热容 c 均为已知常数，且物体初始温度为 t_0。请推导物体温度随时间的变化函数 $t=f(\tau)$。

集中参数法　$\frac{\theta}{\theta_0}=exp(-\frac{\alpha A_x}{\rho cV}\tau)=\frac{t-t_f}{t_0-t_f}$

$\therefore t=t_f+(t_0-t_f)exp(-\frac{\alpha A_x}{\rho cV}\tau)=f(\tau)$

【3-8】（北京科技大学 2007 年考研试题）在用裸露热电偶测定气流的非稳定温度场时，怎样可以改善热电偶的温度响应特性？　$\tau\downarrow$　$\rightarrow$ 时间常数 $\tau=\frac{\rho cV}{hA}\downarrow$ 反应越好

解：在用裸露热电偶测定气流温度的场合，热电偶的时间常数是说明热电偶对流体温度变化响应快慢的指标。时间常数 $\tau_c=\frac{\rho cV}{hA}$，时间常数越小，热电偶越能迅速反映出流体温度的变动。τ_c 不仅取决于热电偶的几何参数 V/A，物性条件 ρc，还同换热条件 h 有关。从物理意义上说，热电偶对流体温度变化反应的快慢取决于自身的热容量 ρcV 及表面换热条件 hA。热容量越大，温度变化得越慢；表面换热条件越好，单位时间内传递的热量越多，则热电偶的温度越迅速接近被测流体的温度。

热容量 ρcV　($\sqrt{\rho c\lambda}$ 吸热系数)

换热条件 hA

【3-9】（北京科技大学 2007 年考研试题）采用集中参数法求解物体非稳态导热时，需满足什么条件？说明为什么要满足此条件。导热热阻远小于换热阻，内部温度趋于一致

$Bi\leqslant0.1$

解：采用集中参数法求解物体非稳态导热时需满足 $Bi=\frac{hl}{\lambda}\leqslant0.1$，因为只有当固体内部的导热热阻远远小于表面对流换热热阻即毕渥数 Bi 很小时，任何时刻固体内部的温度趋于一致，才能用集中参数法。

【3-10】（上海交通大学 2000 年考研试题）判别能否用集中参数法求解非稳态导热问题的准则数是：①Bi，②Fo；③$BiFo$。　$Bi<0.1$

解：判别能否用集中参数法求解非稳态导热问题的准则数是毕渥数 Bi。

【3-11】（上海交通大学 2002 年考研试题）写出 Bi 和 Fo 的组成式，简述其物理意义。

解：$Bi=\frac{\delta h}{\lambda}$，物理意义表示固体内部单位导热面积上的导热热阻与单位表面积上的换热热阻之比。反映 物体在非稳态下的温度分布

$Fo=\frac{a\tau}{l_c^2}$，物理意义表示非稳态过程进行深度的无量纲时间。

【3-12】（上海交通大学 2002 年考研试题）用集中参数法计算下落铝滴的初始冷却速率 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}\tau$。若球状铝滴的直径 $d=0.5$mm，初始温度 $T_1=1700$K，下落速度 $u=1$m/s，铝滴可看成灰体，其表面辐射率（黑度）$\varepsilon=0.2$，密度 $\rho=2100$kg/m³，比热 $c_p=1100$J/(kg·K)，铝滴所处的环境及空气温度 $T_\infty=300$K，空气导热系数 $\lambda=0.067$W/(m·K)，运动粘度 $\nu=117.3\times10^{-6}$m²/s，$Pr=0.70$，空气外掠球体的对流换热规律为 $Nu=2+(0.4Re^{0.5}+0.06Re^{0.667})Pr^{0.4}$。

解：对于可以忽略内阻，温度与空间坐标无关的物体，利用集中参数法可得导热微分方程式：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

其中，$\dot{\Phi}$为广义内热源。

考虑铝滴表面换热与表面辐射换热，可得如下热平衡方程式：

$$\boxed{-\dot{\Phi}V=Ah(t_1-t_\infty)+A\sigma(T_1^4-T_\infty^4)}$$

$=\varepsilon A\sigma(T_1^4-T_\infty^4)$

由此可得下落铝滴的冷却速率为：

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}=-\frac{A}{V}\cdot\frac{1}{\rho c_p}[h(t_1-t_\infty)+\varepsilon\sigma(T_1^4-T_\infty^4)]$$

$$=-\frac{6}{d\rho c_p}[h(t_1-t_\infty)+\varepsilon\sigma(T_1^4-T_\infty^4)]$$

根据已知条件可知空气外掠球体的雷诺数为：

$$Re=\frac{ud}{\nu}=\frac{1\times0.5\times10^{-3}}{117.3\times10^{-6}}=4.2626$$

根据空气外掠球体的对流换热规律可知：

$$Nu=2+(0.4Re^{0.5}+0.06Re^{0.667})Pr^{0.4}$$

$$=2+(0.4\times4.2626^{0.5}+0.06\times4.2626^{0.667})\times0.7^{0.4}=2.8529$$

$=\frac{hd}{\lambda}$　$h=\frac{\lambda}{d}Nu\cdots$

【3-14】（上海交通大学 2001 年考研试题）一直径 10cm，初温 100℃的铜球放入 20℃的水中自然冷却，铜的密度为 8000kg/m³ 比热为 380J/kg，导热系数为 400W/(m·K)，水与铜球的自然对流换热系数为 240W/(m²·K)，试计算：

$d=0.1$m　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$　$A=4\pi r^2$　$\rightarrow l_c=V/A=\frac{1}{3}r=\frac{1}{6}d$

(1) 时间常数。　$\tau_c=\frac{\rho cV}{hA}=\frac{\rho cd}{6h}$

(2) 球的温度降到 30℃所需要的时间。$\longrightarrow\frac{\theta}{\theta_0}=exp(-\frac{hA}{\rho cV}\tau)=exp(-\frac{6h}{\rho cd}\cdot\tau)$

(3) 此时所释放的总热量。

$Q=c_p\cdot\rho V(t_0-t)=c_p\cdot\rho\frac{4}{3}\pi r^3\cdot(t_0-t)$

$\Phi=hA(t-t_\infty)=\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}hA(t_0-t_\infty)=\theta_0\cdot hA\cdot exp(-Bi\cdot Fo)$

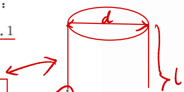
【3-17】（浙江大学 2004 年考研试题）某一直径为 0.1m、初始温度为 300K 的轴，其密度为 7832kg/m³，导热系数为 51.2W/(m²·K)，比热为 541J/(kg·K)。将该轴置于温度为 1200K 的加热炉中，其表面对流换热系数为 100W/(m²·K)，则其时间常数为 $\frac{\rho cV}{hA}$；要使其中心温度达到 800K，则放入加热炉内约需要加热________分钟（用集中参数法）。

R=0.05m $Bi=hR/\lambda$

答案：1059.3s　14.3

解析：先检验是否可用集中参数法，根据毕渥数的定义可知：

$$Bi=\frac{hR}{\lambda}=\frac{100\times0.1/2}{51.2}=0.098<0.1$$



可以采用集中参数法。

根据时间常数的定义可知：$\tau_c=\frac{\rho cV}{hA}=\frac{\rho c}{h}\cdot\boxed{\frac{\frac{\pi}{4}d^2l}{2\pi d^2+\pi dl}}\approx\frac{\rho c}{h}\cdot\frac{d}{4}(2\pi d^2\ll\pi dl)$。把 $\rho=7832\text{kg/m}^3$、$h=100\text{W/(m}^2\cdot\text{K)}$、$c=541\text{J/(kg}\cdot\text{K)}$、$d=0.1\text{m}$ 代入上式，计算可得时间常数为：$\tau_c=1059.3\text{s}$。

根据集中参数法温度场的分析解，可得：$\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}=\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right)$。把 $t_0=300\text{K}$、$t=800\text{K}$、$t_\infty=1200\text{K}$、$\tau_c=1059.3\text{s}$ 代入上式，可得：$\tau=859.02\text{s}=14.3\text{min}$。

$\frac{800-1200}{300-1200}$

【3-18】（浙江大学 2005 年考研试题）请解释非稳态导热分析中的集中参数法，其适用条件是什么？为何可以在这种条件下使用？

$Bi\to0$　$t=f(\tau)$

解：当固体内部的导热热阻远小于其表面的换热热阻时，任何时刻固体内部的温度都趋于一致，以致可以认为整个固体在同一瞬间均处于同一温度下。这时所要求解的温度仅是时间 τ 的一元函数而与空间坐标无关。这种忽略物体内部导热热阻的简化分析方法称为集中参数法。

其适用条件：$\boxed{Bi=\frac{hl}{\lambda}\leqslant0.1}$。在这种条件下，物体中最大与最小的过余温度之差小于 5%，对于一般工程计算，此时已经足够精确地可以认为整个物体温度均匀。

【3-19】（浙江大学 2000 年考研试题）导热集中参数系统的热惯性可由时间常数 τ_c 来描述，其影响因素为 $\rho cV/hA$。

$\tau_c=\frac{\rho cV}{hA}$ → 热容量 → 换热表面

答案：取决于物体自身的热容量 ρcv 以及表面换热条件 hA

【3-40】（北京航空航天大学 2005—2006 学年第 2 学期期末考试试题）什么是时间常数？用热电偶测量温度变化着的气流温度时如何提高测量精度？

答：时间常数 $\tau_c=\frac{\rho cV}{hA}$。用热电偶测量温度变化着的气流温度时应尽可能减小时间常数，在热电偶材料一定时，增大对流传热系数，减小体积，增大面积，或减小体积面积比。

【3-41】（华中科技大学 2003—2004 学年第 2 学期期末考试试题）非周期性的加热或冷却过程可以分为哪两个阶段，它们各自有什么特征？

非正规）

答：非周期性的加热或冷却过程可以分为初始状况阶段和正规状况阶段。前者的温度分布依然受着初始温度分布的影响，也就是说热扰动还没有扩散到整个系统，系统中仍然存在着初始状态，此时的温度场必须用无穷级数加以描述；而后者却是热扰动已经扩散到了整个系统，系统中各个地方的温度都随时间变化，此时温度分布可以用初等函数加以描述。

【3-42】（华中科技大学 2003—2004 学年第 2 学期期末考试试题）时间常数是从什么导热问题中定义出来的？它与哪些因素有关？同一种物体导热过程中的时间常数是不是不变的？

答：时间常数是从导热问题的集中参数系统分析中定义出来的，为 $\tau_c=\frac{\rho cV}{hA}$，从中不难看出，它与系统（物体）的物性、形状大小相关，且与环境状况（换热状况）紧密相联。因此，同一物体处于不同环境其时间常数是不一样的。

【3-43】（西安交大、浙大、上海交大等九校 2002 年期末联考试题）一块厚度为 $2\delta(-\delta\leqslant x\leqslant\delta)$ 的大平板，与温度为 t_f 的流体处于热平衡。当时间 $\tau>0$ 时，左侧流体温度升高并保持为恒定温度 $2t_f$。假定平板两侧表面传热系数相同，当 $Bi=\frac{h\delta}{\lambda}\to0$ 时，试确定达到新的稳态时平板中心及两侧表面的温度，画出相应的板内及流体侧温度分布的示意性曲线，并做简要说明。

解：相应的板内及流体侧温度分布的示意性曲线如图 3-14 所示。

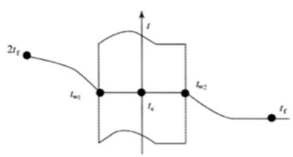


图 3-14

$Bi\to0$ 时，内热阻 $\to0$，$t_{w1}=t_{w2}=t_c=\frac{1}{2}(2t_f+t_f)=1.5t_f$。

【3-44】（中国石油大学<华东>2005—2006 学年第 2 学期期末考试试题）非稳态导热物体可以用集中参数法分析的条件是什么？

解：导热物体内部导热热阻忽略不计，即任一时刻物体内温度相同。实用判别条件为：$\boxed{Bi<0.1\text{或 }Bi_v<0.1M(M\text{ 是与物体几何形状有关的无量纲数})}$

【3-20】（浙江大学 2006 年考研试题）为什么玻璃体温计测体温必须在测温点放置一定的时间？如果你来设计体温计，有哪些方法可以缩短测温的放置时间？

$\tau_c\downarrow$

解：对于玻璃体温计的分析可以简化为分析玻璃体中水银的非稳态导热问题。由于玻璃体中水银较少，所以可以用集中参数法。根据集中参数法的分析解可知，时间参数为：

$$\tau=\rho cV/(hA)$$

由此可知，玻璃体中的物质热容量 ρcV 越小、玻璃体的表面换热条件越好，那么温度变化越快。由于水银的热容量比较大，那么在表面换热条件一定的条件下，温度变化较慢，时间常数较大。所以，玻璃体温计测体温必须在测温点放置一定的时间。

根据时间参数的定义式可知，要缩短测温的放置时间必须从减小物质的热容量 ρcV、增大表面换热条件 hA，以缩短测温的放置时间。

【3-21】（上海九校联考 2002 年考研试题）一块厚度为 $2\delta(-\delta\leqslant x\leqslant\delta)$ 的大平板，与温度为 t_f 的流体处于热平衡。当时间 $\tau>0$ 时，左侧流体温度升高并保持为恒定温度 $2t_f$。假定平板两侧表面传热系数相同，当 $\boxed{Bi=\frac{h\delta}{\lambda}}\to0$ 时，试确定达到新的稳态时平板中心及两侧表面的温度，画出相应的板内及流体侧温度分布的示意性曲线，并做简要说明。

种参数 t_f

解：图 3-7 为板内及流体侧温度分布的示意性曲线。

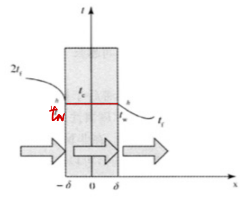


图 3-7

本问题的传热过程包括以下三个环节：高温流体与平板之间的对流传热；板内热传导；平板与低温流体之间的对流传热。当 $Bi=\frac{h\delta}{\lambda}\to0$ 时，平板内部的导热热阻几乎可以忽略，此时可以认为任意时刻平板中各点温度接近均匀，因而可以认为左右两侧壁温均为 $t_w=t_c$。

高温流体与平板之间对流传热热流量：

$$\boxed{\Phi=hA(2t_f-t_w)}\qquad②$$

平板与低温流体之间对流传热热流量：

$$\boxed{\Phi=hA(t_w-t_f)}\qquad③$$

由②、③式可知：

$$t_w=t_c=1.5t_f$$

所以达到新的热稳态时，平板中心与两侧表面温度为 $1.5t_f$。

第四章

(2)区域离散化。用一系列与坐标轴平行的网格线把求解区域划分成许多子区域，用网格线的交点作为需要确定温度值的空间位置，称为节点(结点)。节点的位置用该节点在两个方向上的标号 m、n 表示。相邻两节点间的距离称步长，记为 Δx、Δy。每个节点都可以看成是以它为中心的一个小区域的代表，把节点代表的小区域称为元体(又叫控制容积)。

(4)设立迭代初场。代数方程组的求解方法有直接解法与迭代解法，传热问题的有限差分法中主要采用迭代法。采用迭代法求解时，需对被求的温度场预先设定一个解，这个解称为初场，并在求解过程中不断改进。

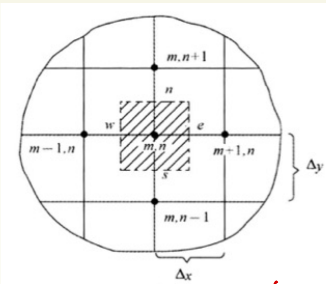
(5)求解代数方程组。如图 4-2(b)，除 $m=1$ 的左边界上各节点的温度已知外，其余 $(M-1)\times N$ 个节点均需建立离散方程，共有 $(M-1)\times N$ 个方程，则构成一个封闭的代数方程组。

1)线性代数方程组：代数方程一经建立，其中各项系数在整个求解过程中不再变化；

2)非线性代数方程组：代数方程一经建立，其中各项系数在整个求解过程中不断更新。

是否收敛判断：是指用迭代法求解代数方程是否收敛，即本次迭代计算所得之解与上一次迭代计算所得之解的偏差是否小于允许值。

关于变物性(物性为温度的函数)导热问题，建立的离散方程，四个邻点温度的系数不是常数，而是温度的函数。在迭代计算时，这些系数应不断更新，这是非线性问题。



在数值计算时，用三个相邻节点上的值近似表示二阶导数的表达式即可，则相应的略去 $O(\Delta x^2)$。于是得：

中心差分 $$\boxed{\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{m,n}=\frac{t_{m+1,n}-2t_{m,n}+t_{m-1,n}}{\Delta x^2}}$$

同理，可得：

$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right|_{m,n}=\frac{t_{m,n+1}-2t_{m,n}+t_{m,n-1}}{\Delta y^2}$$

这是二阶导数的差分表达式，称为中线差分。

代入导热问题的控制方程 $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0$，得：

$$\boxed{\frac{t_{m+1,n}-2t_{m,n}+t_{m-1,n}}{\Delta x^2}+\frac{t_{m,n+1}-2t_{m,n}+t_{m,n-1}}{\Delta y^2}=0}$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_k \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{t_{k+1}-t_k}{\Delta x} & \text{向前差分} \\ \dfrac{t_k-t_{k-1}}{\Delta x} & \text{向后差分} \\ \dfrac{t_{k+1}-t_{k-1}}{2\Delta x} & \text{中心差分} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_k \longrightarrow \frac{t_{k+1}-2t_k+t_{k-1}}{\Delta x^2} \quad \text{中心差分}$$

(2)热平衡法

对内部节点，教材已通过推导得出了教材式(4-3)，其结论与 Taylor 级数展开法相同。能量平衡法的本质是导热傅里叶定律及能量守恒定律的具体体现。以含有内热源的内角顶(图 4-4 中节点(m,n))为例，导出其离散方程如下：

$$\lambda\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\frac{3}{4}\Delta x\Delta y\Phi_{m,n}+\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta y}{2}\right)h_1(t_{f1}-t_{m,n})=0 \quad (4-3)$$

同理可以导出其他几种类型边界节点的离散方程。

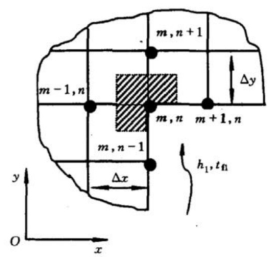
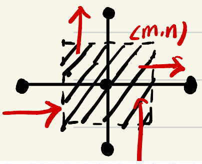


图 4-4　内角顶的离散示意图

$\boxed{\text{导入为正}}$

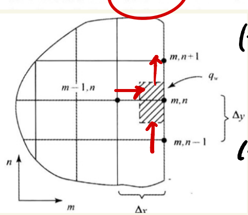


得到 = 失去

$$\left(-\lambda\Delta y\frac{t_{m,n}-t_{m-1,n}}{\Delta x}\right)+\left(-\lambda\Delta x\frac{t_{m,n}-t_{m,n-1}}{\Delta y}\right)=\left(-\lambda\Delta y\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}\right)+\left(-\lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}\right)$$

(一)用热平衡法导出典型边界点上的离散方程

假设物体具有内热源 $\dot{\Phi}$(不必均匀分布)，而且边界上有向该元体传递的 $\boxed{\text{热流密度 } q_w}$。

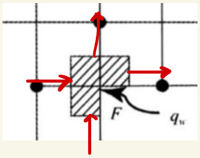


$$\left(-\lambda\Delta y\frac{t_{m,n}-t_{m-1,n}}{\Delta x}\right)+\left(-\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n}-t_{m,n-1}}{\Delta y}\right)+\boxed{q_w\cdot\Delta y}+\boxed{\dot{\Phi}\frac{\Delta x\Delta y}{2}}=\left(-\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}\right)$$

2. 外部角点

如图 4-5 所示，二维墙角计算区域中，该节点外部角点仅代表 1/4 个以 Δ_x，Δ_y 为边长的元体。假设边界上有向该元体传递的热流密度为 q_w，则据能量守恒定律得其热平衡式为：

$$\left(-\lambda\Delta y\frac{t_{m,n}-t_{m-1,n}}{\Delta x}\right)+\left(-\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n}-t_{m,n-1}}{\Delta y}\right)+\boxed{q_w\frac{\Delta x+\Delta y}{2}}+\dot{\Phi}\frac{3}{4}\Delta x\Delta y=\left(-\lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}\right)+\left(-\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}\right)$$



4. 讨论有关 q_w 的三种情况

(1)若是绝热边界,令上式 $q_w=0$ 即可。

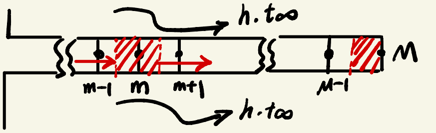
(2)若 $q_w\neq0$ 时,流入元体,q_w 取正;流出元体,q_w 取负使用上述公式。

(3)若属对流边界,则:$q_w=h(t_f-t_{m,n})$,将 q_w 代入上式即可。

$\Delta x=\Delta y$ 时,则对于平直边界:

无量纲数 $\boxed{\frac{h\Delta x}{\lambda}}$ 是以网格步长 Δx 为特征长度的毕渥数,即为 $\boxed{Bi_\Delta\text{,称为网格毕渥数}}$

稳态、无内热源、常物性的圆截面直肋,求 m、M 节点方程　$A_c=\frac{\pi d^2}{4}$　$P=\pi d$



m点:$\left(-\lambda\Delta y\frac{t_m-t_{m-1}}{\Delta x}\right)+hP\Delta x(t_\infty-t_m)=\left(-\lambda\Delta y\frac{t_{m+1}-t_m}{\Delta x}\right)$

M点:$\left(-\lambda\Delta y\frac{t_M-t_{M-1}}{\Delta x}\right)+h\left(P\frac{\Delta x}{2}+A_c\right)(t_\infty-t_M)=0$

(二)代数方程的求解方法

导热问题的所有离散方程组成一个封闭的代数方程组后,求解代数方程组就可以得到各个节点的温度值,也就求解出了温度场。线性代数方程组的求解方法有消元法、矩阵求逆法、迭代法等,这里仅简单介绍在导热的数值计算中常用的迭代法中的两种。

1. 简单迭代法

设 n 个节点的温度满足如下 n 元方程组:

$$\begin{cases}a_{11}t_1+a_{12}t_2+\cdots+a_{1j}t_j+\cdots+a_{1n}t_n=b_1\\a_{21}t_1+a_{22}t_2+\cdots+a_{2j}t_j+\cdots+a_{2n}t_n=b_2\\a_{n1}t_1+a_{n2}t_2+\cdots+a_{nj}t_j+\cdots+a_{nn}t_n=b_n\end{cases}$$

其中 a_{ij}、b_i 为常数,且 $a_{ii}\neq0$。改写为显函数形式:

$$\begin{cases}t_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}t_2-\cdots-a_{1j}t_j-\cdots-a_{1n}t_n)\\t_2=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}t_1-\cdots-a_{2j}t_j-\cdots-a_{2n}t_n)\\t_n=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}t_1-\cdots-a_{nj}t_j-\cdots-a_{n(n-1)}t_{n-1})\end{cases}$$

先假设 $t_1^0,t_2^0,\cdots,t_n^0$ 为方程组的解,将 $t_1^0,t_2^0,\cdots,t_n^0$ 这组值代入上面联立的各式,可以求出另一组温度值 $t_1^1,t_2^1,\cdots,t_n^1$,依次迭代,进一步可以得到若干组温度值 $t_1^2,\cdots,t_n^2;\cdots;t_1^k,\cdots,t_n^k$,直到满足 $\max|t_i^k-t_i^{k-1}|\leqslant\varepsilon$,认为 $t_1^k,\cdots,t_n^k$ 就是方程的解。

2. 高斯—塞德尔迭代法

高斯—塞德尔迭代法是在简单迭代法的基础上加以改进的迭代方法。它与简单迭代法的主要区别是在迭代运算过程中总使用最新算出的数据。例如第一次迭代时的计算式如下:

$$\begin{cases}t_1^1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}t_2^0-\cdots-a_{1j}t_j^0-\cdots-a_{1n}t_n^0)\\t_2^1=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}t_1^1-\cdots-a_{2j}t_j^0-\cdots-a_{2n}t_n^0)\\\cdots\\t_n^1=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}t_1^1-\cdots-a_{nj}t_j^1-\cdots-a_{n(n-1)}t_{n-1}^1)\end{cases}$$

高斯—塞德尔迭代法比简单迭代法收敛速度更快。

代数方程求解方法主要有直接解法和迭代法两种。当节点数很多时,用迭代法显然是一种有效的方法,即依据离散方程组不断采用节点温度之最新值代替假定值,直到收敛。一般采用下式判断迭代是否收敛。

$$\boxed{\max\left|\frac{t_i^{(k)}-t_i^{(k+1)}}{t_{\max}^{(k)}}\right|<\varepsilon}\tag{4-5}$$

其中上标 (k) 及 $(k+1)$ 表示迭代次数,$t_{\max}^{(k)}$ 表示第 k 次迭代计算的最大值。ε 为事先给定的允许偏差,一般在 $10^{-3}\sim10^{-6}$ 之间。

收敛判据(对角占优)

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\quad\frac{|a_{12}|+|a_{13}|}{|a_{11}|}\leqslant1,\ \frac{|a_{21}|+|a_{23}|}{|a_{22}|}\leqslant1,\ \frac{|a_{31}|+|a_{32}|}{|a_{33}|}\leqslant1$$

每个迭代变量系数(中心节点)大于等于其他之和 ⟶ 一定收敛

三、非稳态导热问题的数值解法　$\frac{\partial t}{\partial\tau}$

非稳态导热和稳态导热二者微分方程的区别在于 $\boxed{\text{控制方程中多了一个非稳态项}}$,其中扩散项的离散方法与稳态导热一样。非稳态导热数值解法有如下特点:

(1)非稳态导热微分方程多了非稳态项,因此单值性条件中增加了初始条件。

(2)除了对空间域进行离散外,还需要对时间进行域离散。

(3)利用热平衡法导出节点温度方程时需要考虑控制容积的热力学能随时间的变化。

(4)由于时间和空间同时离散,在有些情况下空间步长和时间步长不能任意选择,否则会带来节点温度方程求解的稳定性问题。

一维非稳态导热的数值求解方法:以第三类边界条件下常物性、无内热源大平壁的一维非稳态导热问题为例,其导热微分方程为 $\boxed{\frac{\partial t}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2t}{\partial x^2}}$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\tau}\right|_{n,i}=\frac{t_n^{(i+1)}-t_n^{(i)}}{\Delta\tau}\quad\text{向前差分}$$

$$=\frac{t_n^{(i)}-t_n^{(i-1)}}{\Delta\tau}\quad\text{向后差分}$$

$$=\frac{t_n^{(i+1)}-t_n^{(i-1)}}{2\Delta\tau}\quad\text{中心差分}$$

显式差分格式

$$\frac{\partial t}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2t}{\partial x^2}\longrightarrow\underbrace{\frac{t_n^{(i+1)}-t_n^{(i)}}{\Delta\tau}}_{\text{向前差分}}=a\underbrace{\boxed{\frac{t_{n+1}^{(i)}-2t_n^{(i)}+t_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2}}}_{\text{中心差分}}$$

单个未知数

$$t_n^{(i+1)}=\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}(t_{n+1}^{(i)}+t_{n-1}^{(i)})+\left(1-2\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}\right)t_n^{(i)}$$

$$=Fo_\Delta(t_{n+1}^{(i)}+t_{n-1}^{(i)})+(1-2Fo_\Delta)t_n^{(i)}$$

此式为内部节点温度方程的显式差分格式。

根据上式可以得到两点结论:

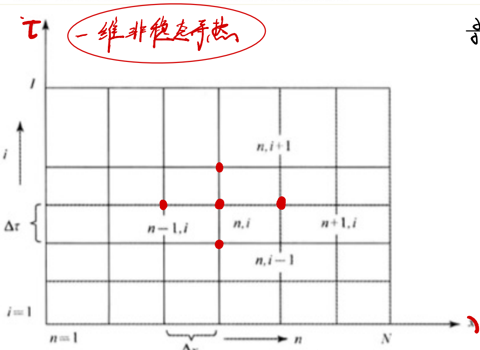
1)任意一个内部节点 n 在 $(i+1)$ 时刻的温度都可以由该节点及其相邻节点在 i 时刻的温度由上式直接求出,不必联立求解方程组,这是显式差分格式的优点。这样就可以从初始温度出发依次求出各时刻的节点温度。计算工作量小,对步长有限制,出现不合理振荡解

必须满足显式差分格式的 $\boxed{\text{稳定性条件}}$,即 $1-2Fo_\Delta\geqslant0$,得到 $Fo_\Delta=\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}\leqslant\frac{1}{2}$

$Fo_\Delta\leqslant1/2$

稳定性条件说明,一旦空间步长 Δx 或时间步长 $\Delta\tau$ 的数值确定之后,另一个步长的数值就不能任意选择,必须满足稳定性条件。

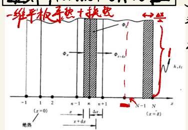
一维非稳态导热



隐式差分:$\frac{t_n^{(i+1)}-t_n^{(i)}}{\Delta\tau}=a\frac{t_{n+1}^{(i+1)}-2t_n^{(i+1)}+t_{n-1}^{(i+1)}}{\Delta x^2}$ 有3个未知数　计算量大,步长无限制,没有解振荡

$\boxed{\text{边界节点的离散方程}}$

一维平板导热+换热



节点N为对流边界,节点1为绝热的对称面

对 $n=1,2,\cdots,N-1$ 有 $t_n^{(i+1)}=Fo_\Delta(t_{n+1}^{(i)}+t_{n-1}^{(i)})+(1-2Fo_\Delta)t_n^{(i)}$ ⟶ 内部:$Fo_\Delta=\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}\leqslant\frac{1}{2}$

对 $n=N$(边界节点)　根据能量守恒:$\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{t_N^{(i+1)}-t_N^{(i)}}{\Delta\tau}=h(t_f-t_N^{(i)})+\left(-\lambda\frac{t_N^{(i)}-t_{N-1}^{(i)}}{\Delta x}\right)$

$Fo_\Delta=\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$

$Bi_\Delta=\frac{h\Delta x}{\lambda}$

$\longrightarrow t_N^{(i+1)}=t_N^{(i)}\left(1-\frac{2h\Delta\tau}{\rho c\Delta x}-\frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2}\right)+\frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2}t_{N-1}^{(i)}+\frac{2h\Delta\tau}{\rho c\Delta x}t_f$

$=t_N^{(i)}(1-2Fo_\Delta Bi_\Delta-2Fo_\Delta)+2Fo_\Delta t_{N-1}^{(i)}+2Fo_\Delta Bi_\Delta t_f$

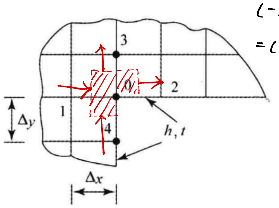
⟶ 对流边界:$1-2Fo_\Delta Bi_\Delta-2Fo_\Delta\geqslant0$

$\Rightarrow\boxed{Fo_\Delta\leqslant\frac{1}{2(1+Bi_\Delta)}}$ 更苛刻

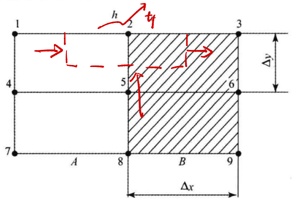
在第三类边界条件(对流)下

【4-1】（西安交通大学 2005 年考研试题）如图 4-9 所示出了常物性、有均匀内热源 $\dot{\Phi}$ 的二维稳态导热问题局部边界区域的网格配置，试用热平衡法建立节点 0 的离散方程（有限差分方程，$\Delta x \neq \Delta y$）。

$$\left(-\lambda\Delta y\frac{t_0-t_1}{\Delta x}\right)+\left(-\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_0-t_4}{\Delta y}\right)+h\frac{\Delta x+\Delta y}{2}(t-t_0)+\dot{\Phi}\frac{3}{4}\Delta x\Delta y$$
$$=\left(-\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_2-t_0}{\Delta x}\right)+\left(-\lambda\Delta x\frac{t_3-t_0}{\Delta y}\right)$$



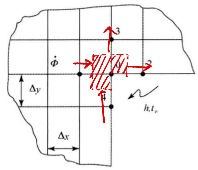
【4-2】（上海交通大学 2001 年考研试题）二维无内热源稳态导热问题，网格划分如图所示，试导出图 4-10 中节点 2 的节点方程。已知顶部环境温度为 t_f，对流换热系数 h，材料 A 的导热系数为 λ_A，材料 B 的导热系数为 λ_B。

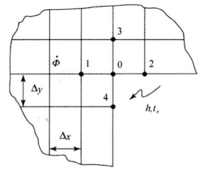


$$\left(-\lambda_A\frac{\Delta y}{2}\frac{t_2-t_1}{\Delta x}\right)+\left[-(\lambda_A+\lambda_B)\frac{\Delta x}{2}\frac{t_2-t_5}{\Delta y}\right]+h\Delta x(t_f-t_2)=\left(-\lambda_B\frac{\Delta y}{2}\frac{t_3-t_2}{\Delta x}\right)$$

【4-4】（上海九校联考 2002 年考研试题）图 4-13 给出了常物性、有均匀内热源 Φ、二维稳态导热问题局部边界区域的网格配置，试用热平衡法建立节点 0 的有限差分方程式（设 $\Delta x=\Delta y$）。

解：如图 4-14 所示，0 单元为内部角点，代表 3/4 个元体。





$$\left(-\lambda\Delta y\frac{t_0-t_1}{\Delta x}\right)+\left(-\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_0-t_4}{\Delta y}\right)+\dot{\Phi}\cdot\frac{3}{4}\Delta x\Delta y+h(t_\infty-t_0)\frac{\Delta x+\Delta y}{2}$$
$$=\left(-\lambda\Delta x\frac{t_3-t_0}{\Delta y}\right)+\left(-\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_2-t_0}{\Delta x}\right)$$

【4-3】（上海交通大学 2000 年考研试题）试导出二维稳态导热时左上拐角节点 (i,j) 的能量守恒表达式，即有限差分方程式（不需要展开、化简）。已知右侧壁绝热；顶端处于温度为 t_f，换热系数为 h 的冷流体环境，同时受外界辐射 q_r（W/m²）照射；有内热源 $\dot{\Phi}$[W/m³]；网络 $\Delta x=\Delta y$；材料导热系数为 λ。

解：本问题的简化模型如图 4-12 所示。

分析图 4-12 所示灰色单元，有热传导、对流传热和热辐射，并且考虑内热源，那么得到的热平衡方程式如下所示：

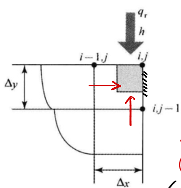


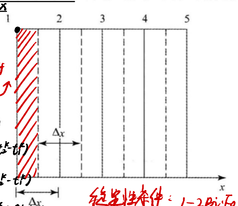
图 4-12

$$\Phi_{内}+\Phi_{热传导}+\Phi_{对流}+\Phi_{辐射}=0$$

$$h\frac{\Delta x}{2}(t_f-t_{i,j})+q_r\frac{\Delta x}{2}+\left(-\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{i,j}-t_{i-1,j}}{\Delta x}\right)+\left(-\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{i,j}-t_{i,j-1}}{\Delta y}\right)+\dot{\Phi}\frac{1}{4}\Delta x\Delta y=0$$

【4-6】（重庆大学 2008 年考研试题）如图 4-16 所示，一维平壁的非稳态导热，已知边界面周围流体温度 t_f 和边界面与流体之间的表面传热系数 h，取步长为 Δx。针对边界节点 1，应用热平衡法推导出数值计算的显式差分格式，并给出数值求解的稳定性条件。

$Fo=\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}=\frac{\lambda\Delta\tau}{\rho c\Delta x^2}$　$Bi=\frac{h\Delta x}{\lambda}$



$dU=\Phi_\lambda+\Phi_h$

$$\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{t_1^{k+1}-t_1^k}{\Delta\tau}=h(t_f-t_1^k)+\lambda\frac{t_2^k-t_1^k}{\Delta x}$$

$$t_1^{k+1}=t_1^k+\frac{2h\Delta\tau}{\rho c\Delta x}(t_f-t_1^k)+\frac{2\lambda\Delta\tau}{\rho c\Delta x^2}(t_2^k-t_1^k)$$
$$=t_1^k+2Bi\cdot Fo(t_f-t_1^k)+2Fo(t_2^k-t_1^k)$$
$$=(1-2BiFo-2Fo)t_1^k+2Fo(t_2^k+Bi\,t_f)$$

稳定性条件：$1-2Bi\cdot Fo-2Fo\geq 0\rightarrow \boxed{Fo\leq\frac{1}{2(Bi+1)}}$